

Ex-12-01: À l'aide de la formule de Taylor, établir le développement limité suivant autour de $x = 0$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

Ex-12-02: Déterminer, dans chaque cas, le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ et expliciter le reste $R(x)$.

- 1) $f(x) = 3 - 2x + x^2 - x^3 + \frac{x^5}{4}$ 2) $f(x) = \sin(3x)$ 4) $f(x) = |\cos(x)|$
3) $f(x) = \log(2+x)$

Ex-12-03:

- 1) En utilisant un développement limité pour $\log(1+x)$, montrer que si (a_n) est telle que $a_n \rightarrow L$, alors

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow e^L$$

- 2) Utiliser ce résultat pour calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right)^{5n}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n$
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n$

Ex-12-04: Soit f une fonction paire (resp. impaire) possédant un $DL(n)$ autour de $x_0 = 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x).$$

Montrer que tous les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Ex-12-05:

- 1) Calculer le $DL(3)$ de $\tan(x)$ autour de $x_0 = 0$, avec un reste de la forme $x^3 \varepsilon(x)$, puis montrer que

$$\tan(x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4 \phi(x),$$

où $\phi(x)$ est une fonction que l'on exprimera explicitement en fonction de x et $\varepsilon(x)$, et on vérifiera que $\phi(x)$ tend vers zéro lorsque $x \rightarrow 0$.

- 2) Utiliser la première partie pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \tan(x)^2}{x^2 \tan(x)^2},$$

puis

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ \tan(t)^2 - \frac{1}{(t - \frac{\pi}{2})^2} \right\}$$

Ex-12-06: Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ des fonctions composées ci-dessous :

- 1) $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}, n = 6$
- 2) $f(x) = \log(\cos(x)), n = 4$
- 3) $f(x) = \exp(\sin(x)), n = 4$
- 4) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, n = 3$

Ex-12-07: En utilisant des développements limités (d'ordre convenable) autour de 0, calculer les limites suivantes.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1+x)}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Ex-12-08: Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = bx + cx^2 + x^4 \varepsilon(x) \quad \forall x \in]-1, 1[,$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Vrai ou faux ?

- 1) Alors f est continue en 0.
- 2) Si $f \in C^2(]-1, 1[)$, alors $f''(0) = c$.
- 3) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b$.
- 4) $f(x)^2 = b^2 x^2 + c^2 x^4 + x^6 \varepsilon(x)$.

Ex-12-09: Calculer l'intervalle de convergence des séries entières ci-dessous.

- 1) $\sum_{k \geq 0} k^k (x - x_0)^k$
- 2) $\sum_{k \geq 0} k^7 (x - x_0)^k$
- 3) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!^2} (x - x_0)^k$
- 4) $\sum_{k \geq 0} \sin(\frac{k\pi}{2}) (x - x_0)^k$
- 5) $\sum_{k \geq 3} \frac{(-1)^k \log(k)}{k} (x - x_0)^k$
- 6) $\sum_{k \geq 0} \frac{(k!)^3}{(3k)!} (x - x_0)^k$

Ex-12-10: Soit $f(x) = e^{2x+1}$.

- 1) À l'aide de la formule de Taylor uniquement, calculer le $DL(n)$ de f autour de $x_0 = 0$, en précisant le reste.
- 2) Étudier la limite $n \rightarrow \infty$ du $DL(n)$. En particulier, étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$.
- 3) Ensuite, donner la série de Taylor de f autour de 0, ainsi que son intervalle de convergence.

Ex-12-11: Déterminer le développement de Taylor de la fonction

$$f(x) = \frac{2}{3 + 4x}$$

autour de x_0 puis déterminer l'intervalle de convergence dans les cas suivants :

- 1) $x_0 = 0$

2) $x_0 = 2$.

(Lire les indications!)

Ex-12-12: (Exercice facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{3}{2}x^2 + x + \cos(x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

- 1) Montrer que $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ existent, en les calculant.
- 2) En déduire que f est de classe C^3 , et donner son développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$.
- 3) Montrer que f n'est pas C^4 .