Série 11: Dérivée, règle de BH

Ex-11-01: Montrer que si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a,b[$, non-constante, et satisfait $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point $c_+ \in]a,b[$ où sa dérivée est strictement positive, et un point $c_- \in]a,b[$ où sa dérivée est strictement négative.

Ex-11-02: Chercher les max/min globaux des fonctions ci-dessous, sur l'intervalle donné. En déduire l'ensemble image de f.

1) $f(x) = x^2 e^x$, $I = [-3,1]$
2) $f(x) = |\sin(x) + \frac{1}{2}|$, $I = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

Ex-11-03: Montrer analytiquement l'égalité ci-dessous :

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}\,, & x > 0\,, \\ -\frac{\pi}{2}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Ex-11-04: Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2\log x}}{x}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)e^{\sqrt{\sin^2(x)+1}}}{x}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{x-2}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\big(\tanh(x) - 1\big)$
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right\}$
6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos(x)}{x}$
7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$
8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(1 + \sin(x)\big)^{1/x}$
9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x)}{(\log(1+x))^2}$
10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)\tan(x)}{(e^x - 1)^3}$
11) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{2e^{2t} - e^t}{t}$
12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left\{\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right\}^{\frac{1}{x^2}}$
13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})^x$
14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - 1})^x$
15) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$
16) ⚠ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}}\right)$

Ex-11-05: Montrer qu'il existe, sur $[0,1]$, une abscisse $x = c$ pour laquelle les graphes de $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et $g(x) = 2x^8 - x^3$ ont des tangentes parallèles.

Ex-11-06: Montrer l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Ex-11-07: Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\,, \quad \forall x \geqslant 0$$

Ex-11-08: Étudier la limite ci-dessous, en fonction des paramètres a et b :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - ax^2}{e^x - 1 - x - bx^2}$$

Ex-11-09: Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

1) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
2) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Ex-11-10: Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert. Montrer que s'il existe une constante $\alpha > 1$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in I\,,$$

alors f est une constante.

Ex-11-11: Soit f une fonction dérivable dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, telle que $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0)$ existe et est non-nulle, montrer que

1) $f''(x_0) > 0$ implique que x_0 est un minimum local.
2) $f''(x_0) < 0$ implique que x_0 est un maximum local.

Ex-11-12: Trouver et charactériser les extremas locaux et l'ensemble image de la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - \left|x + \tfrac{1}{4}\right| + 1\,.$$