

Ex-10-01: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

- 1) Si $f(x_0) = 2$, et si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- 2) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a .
- 3) Si f est dérivable sur \mathbb{R} , alors $g(x) = \sqrt{f(x)^2}$ est dérivable sur \mathbb{R} .
- 4) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.
- 5) La fonction $f(x) := |\cos(x)|$ est dérivable en $x_0 = 0$.
- 6) \triangle Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a - \delta, a + \delta[$.

Ex-10-02: Utiliser les règles de dérivation pour calculer les dérivées des fonctions suivantes. Ensuite, donner le domaine de la fonction ainsi que celui de sa dérivée.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = \frac{5x+2}{3x^2-1}$ | 4) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}$ |
| 2) $f(x) = \tan(x)$ | 5) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$ |
| 3) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ | 6) $f(x) = x^{(x^x)}$ |
| | 7) $f(x) = \sin(x)^{\sin(x^2)}$ |

Ex-10-03: Calculer f' puis donner les domaines de f et f' .

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = \sqrt[5]{(2x^4 + e^{-(4x+3)})^3}$ | 2) $f(x) = \log_3(\cosh(x))$ |
| | 3) $f(x) = (\log(4^{\sin(x)}))e^{\cos(4x)}$ |

Ex-10-04: Considérer

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1, \end{cases}$$

et déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable partout.

Ex-10-05: Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

- 1) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7 \cos(x)^4$, $g(x) = \log(x)^3$.
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = (x-1)^4$.

Ex-10-06: Montrer que la fonction $f(x) = e^{-x/2} \sin(\sqrt{11}x/2)$ satisfait

$$f''(x) + f'(x) + 3f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex-10-07: Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Ex-10-08: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la n ème dérivée de f , notée $f^{(n)}$.

- 1) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ 3) $f(x) = \log(x)$
 2) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Ex-10-09: Soit, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(Notation : $\frac{d^n}{dx^n} f = f^{(n)}$.) Montrer, par récurrence sur n , que $f_n(x)$ est un polynôme en x .

Ex-10-10: Une fonction dérivable F est une **primitive** de f si $F' = f$. Trouver des primitives pour les fonctions suivantes.

- 1) $f(x) = x^n \quad (n \neq -1)$ 5) $f(x) = \tan^2(x)$ 9) $f(x) = \sinh(x)$
 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 6) $f(x) = \tan(x)$ 10) $f(x) = \cosh(x)$
 3) $f(x) = \sin(x)$ 7) $f(x) = e^x$ 11) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$
 4) $f(x) = \cos(x)$ 8) $f(x) = e^{cx} \quad (c \neq 0)$ 12) $f(x) = x \exp(x^2)$

Ex-10-11: Soient $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 1) Soit x_0 un point tel que $f(x_0) = h(x_0)$, et tel que f et h soient dérivables en x_0 , avec

$$f'(x_0) = h'(x_0) = m.$$

Montrer que g est dérivable en x_0 , et que $g'(x_0) = m$.

- 2) Utiliser le point précédent pour montrer que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en $x_0 = 0$, et donner la valeur de $g'(0)$.

Ex-10-12: Parmi les fonctions ci-dessous, déterminer celles qui sont dérivables, ou continûment dérivables sur \mathbb{R} .

- 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x \arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 2) $f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Ex-10-13: On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possède la **propriété de l'accroissement fini** si il existe un point $c \in]a, b[$ où f est dérivable et où

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Déterminer, parmi les fonctions suivantes, celles qui possèdent la propriété de l'accroissement fini. Lorsque c'est le cas, on donnera si possible la valeur de c .

$$1) \ f(x) = xe^x \text{ sur } [-\pi, \pi]$$

$$2) \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$3) \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$4) \ f(x) = |x| \text{ sur } [-1, 1]$$