Série 09: Continuité, Dérivabilité Automne 2025

Ex-09-01: Soient f et g définies dans un voisinage à droite de x_0, telles que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \ell \in \mathbb{R}\,.$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0\,, \\ -\infty \text{ si } \ell < 0\,. \end{cases}$$

2) Expliquer pourquoi lorsque $\ell = 0$, la limite du produit $f(x)g(x)$ est indéterminée.

Ex-09-02: Donner, s'il y en a, un exemple explicite de fonction

1) continue sur un intervalle fermé et borné, qui n'est pas majorée.
2) définie sur un intervalle fermé et borné, qui est majorée mais pas minorée.
3) continue sur un intervalle fermé, qui a un maximum mais pas de minimum.
4) continue sur un intervalle borné, qui a un minimum mais pas de maximum.
5) définie sur un intervalle fermé et borné, qui a un maximum mais pas de minimum.
6) discontinue en tout point d'un intervalle fermé et borné, qui a un maximum et un minimum.
7) définie sur un intervalle fermé et borné, dont l'ensemble image est un intervalle ouvert et borné.

Ex-09-03: Étudier la continuité des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, au point $x_0 = 0$:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ex-09-04: Les fonctions ci-dessous sont-elle continues sur $\mathbb{R}$?

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x > 1\,, \\ 3 & \text{si } x = 1\,, \\ \dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}\,, & \text{si } x < 1\,, \end{cases}$

2) $g(x) = \lfloor x \rfloor$

3) ⚠ $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$

Ex-09-05: Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x > 3\,, \\ \alpha & \text{si } x = 3\,, \\ \beta x - 4 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

$$(1, \tfrac{1}{2}) \qquad (1, \tfrac{5}{3}) \qquad (2, \tfrac{5}{3}) \qquad (1, 2) \qquad (2, 2)\,.$$

Ex-09-06: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0.

1) Montrer que si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage épointé de x_0 dans lequel $f(x)$ est partout non-nul et de signe constant.
2) Ensuite, donner un exemple explicite d'une fonction f qui est continue, mais qui change infiniment souvent de signe dans tout intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$.

Ex-09-07: Soient I un intervalle non-vide, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue non-constante. Vrai ou faux ?

1) $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle.
2) Si I est borné et fermé, alors $\mathrm{Im}(f)$ est borné et fermé.
3) Si I est borné, alors $\mathrm{Im}(f)$ est borné.
4) Si I est ouvert, alors $\mathrm{Im}(f)$ est ouvert.
5) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint son minimum ou son maximum (ou les deux) sur I.
6) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint son minimum ou son maximum (ou les deux) sur I.
7) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $\mathrm{Im}(f)$ est ouvert.

Ex-09-08: Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut *pas* être prolongée par continuité en $x_0 = 1$.

1) $f\colon [0, 1[\cup]1, \infty[\to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}\,.$$
2) $f\colon]1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2}\,.$$

Ex-09-09: Donner un exemple de deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ en lequel g est continue, telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x))$$

existe, mais n'est pas égal à $f(g(x_0))$.

Ex-09-10: Montrer que les équations (non linéaires) ci-dessous admettent des solutions :

1) $e^{x-1} = x + 1$,

2) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$.

Ex-09-11: En utilisant uniquement la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité des fonctions au point x_0. Lorsque la fonction est dérivable, donner $f'(x_0)$.

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$, $x_0 = -1$
2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x_0 = 1$
3) $f(x) = |x|\sin(x)$, $x_0 = 0$
4) $f(x) = \sqrt{x + |x-1|}$, $x_0 = 1$
5) $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2)\cdots(2^x - 100)$, $x_0 = 0$

Ex-09-12: Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Calculer, en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h}.$$

Ex-09-13: Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

1) si f est paire, alors f' est impaire,
2) si f est impaire, alors f' est paire,

On démontrera ces propriétés *uniquement à l'aide de la définition de dérivée.*