Série 08: Limites de fonctions

Ex-08-01: Vrai ou faux ?

1) La série $\sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n(n+1)}$ diverge.
2) La série $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-\frac{n^2-1}{n+2}}$ converge.
3) La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}$ converge, mais pas absolument.
4) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$ converge.
5) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge absolument, alors il existe $p>1$ tel que $|x_n|\leqslant \frac{1}{n^p}$ pour tout n suffisamment grand.

Ex-08-02: (Séries avec paramètres) Déterminer le domaine $D(f)\subset\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$
2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$
3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x-a)^n$
4) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$
5) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(\frac{\pi x}{2}))^n$
6) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^n$
7) $f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{e^{-x^2n}}{n}$
8) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$

Ex-08-03: Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de $g\circ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si

1) f et g sont croissantes,
2) f et g sont décroissantes,
3) f est croissante et g est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f\circ g$ dans le troisième cas ?

Ex-08-04: Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Vrai ou faux ?

1) Si f est strictement monotone, alors f est injective.
2) Si f est injective, alors f est monotone.
3) Si f est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque f^{-1} est décroissante.
4) Si $f\circ g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Ex-08-05: (Périodicité)

1) Si f est périodique, sa période est-elle toujours définie ?
2) Si f est périodique, montrer que $|f|$ est aussi périodique. La période de $|f|$ (si elle est définie) est-elle égale à celle de f ?

3) Si $|f|$ est périodique, est-ce que f est aussi périodique ?

Ex-08-06: Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant.

1) $f(x) = \dfrac{x^4\cos(3x)}{1+\sin(x)^2}$

2) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

3) $f(x) = \tan(3x) + \cos(\pi x)$

4) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$,

Ex-08-07: Sans faire de calculs, donner les minimums et maximums, lorsqu'ils existent, des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

1) $D = [-1, 1]$, $f(x) = -|x|$

2) $D =]-\pi/2, \pi/4]$, $f(x) = \sin(x)$

3) $D = [-1, 3]$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ 2-x & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$

4) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

5) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$

Si un min/max existe, dire en quel(s) point(s) il est atteint.

Ex-08-08: Dans chacun des cas ci-dessous, donner (sans faire de calculs), s'ils existent,

$$\sup_{x\in A} f(x)\,, \quad \inf_{x\in A} f(x)\,, \quad \max_{x\in A} f(x)\,, \quad \min_{x\in A} f(x)\,.$$

1) $f(x) = x$, $A = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = \mathbb{R}_+^*$

3) $f(x) = x^2$, $A = [1, 4[$.

4) $f(x) = \sin(x)$, $A =]-\frac{\pi}{2}, \pi[$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $A =]-1, 1[$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $A = \mathbb{R}$

Ex-08-09: Suggérer une valeur pour les limites suivantes. Ensuite la justifier *à l'aide de la définition de limite uniquement.*

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)$,

2) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x+6}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+4}{2+3x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$

Ex-08-10: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leqslant 1\,, \\ \frac{x+2}{x} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

1) Si $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

2) Si $y_n = 1 + \frac{1}{n}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

3) Si $z_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.

Que concluez-vous ?

Ex-08-11: Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+2x-1}{3x^2-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$ 5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-2}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Ex-08-12: Étudier les limites $x \to \pm\infty$ suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(a^x+b^x)}{x}$, $(a, b > 1)$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\log x}}{2^x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\arctan(x))$

Ex-08-13: Étudier les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$, 3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2} \lfloor e^{8\sqrt{x}-x} \rfloor$

6) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \lfloor x \rfloor \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

Ex-08-14: Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-\alpha}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{(\tan(x-\alpha))^2}{(x-\alpha)^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$