Ex-07-01: Étudier la convergence des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\tfrac{1}{n^2})$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{n} - \tfrac{n-1}{n^2})$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{100}}{e^{3(\log(n))^2}}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{(-1)^n}{2})n}.$

10) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{0.99999\ldots}}$

Ex-07-02: Étudier la convergence des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7}-n)$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos(\tfrac{\pi}{n+1}))$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\tfrac{2}{n}\right)^{n^2}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{(-1)^n}{4}\right)^n$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Ex-07-03: Discuter la convergence de la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en fonction de $q \in \mathbb{R}$, en utilisant

1) le critère de d'Alembert,
2) le critère de Cauchy.

Ex-07-04: Utiliser le critère de la limite du quotient pour étudier les séries ci-dessous.

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3-n^2+n+3}{n^4+n^3-n^2+1}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt[3]{n^2-2n}}{n^2-1}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[4]{n+1}\,\sin(\tfrac{1}{\sqrt[3]{n^5+1}})$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}-\log(n)+\frac{n}{2}}$

Ex-07-05: Parmi les séries ci-dessous, lesquelles convergent absolument ?

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-5)^n}{(2n)!}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n-|n^2-1|}{3n^2-n+4}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\frac{9\pi}{7}n)}{\sqrt[3]{3n^5+1}}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}\sin(7n)$

Ex-07-06: Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celles qui convergent ou divergent.

1) $\sum_{n \geqslant 0} \{\sqrt{n^3+5} - \sqrt{n^3+2}\}$

2) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$

3) $\sum_{n \geqslant 1} e^{-(\log(n))^2}$

4) $\sum_{n \geqslant 5} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$

Ex-07-07: Considérer $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^{\log_3(n)}}$. Vrai ou faux ?

1) Le critère de Cauchy permet de montrer que la série converge.
2) Le critère de d'Alembert permet de montrer que la série diverge.
3) La série converge, car c'est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$.
4) La série diverge.

Ex-07-08: Étudier la convergence des séries données ci-dessous.

1) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$
2) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3 \cdot 2} + \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{6}{5 \cdot 4} + \ldots$
3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$
4) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$

Ex-07-09: Calculer $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} \right\}$.

Ex-07-10: (Cet exercice est facultatif)

Soit (a_n) une suite pour laquelle les deux limites ci-dessous existent :

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \qquad L_2 = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Montrer que $L_1 = L_2$.