Ex-06-01: Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis représenter les solutions dans le plan complexe.

1) $z^5 = 1$
2) $z^2 = -3 + 4\mathsf{i}$
3) $z^4 = -2\mathsf{i}$
4) $z^3 = -\sqrt{3} + \mathsf{i}$

Ex-06-02: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2+6z+12-4\mathsf{i} = 0$
2) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$
3) $\overline{z}^2 = z + 1$
4) $(\frac{z}{|z|})^3 = \mathsf{i}$

Ex-06-03: Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$z^2 = (1 + \sqrt{3}\, e^{\mathsf{i}\frac{\pi}{2}})^8.$$

Ex-06-04: Décomposer le polynôme $z^6 + 1$

1) en produit de facteurs irréductibles complexes,
2) en produit de facteurs irréductibles réels.

Ex-06-05: Factoriser les polynômes suivants :

1) $P(z) = z^3 - 2z - 4$
2) $P(z) = z^3 + \mathsf{i}z^2 + (1 + 2\mathsf{i})z + \mathsf{i} + 2.$
3) $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^9 + z^{10}$

Ex-06-06: Vrai ou faux ?

1) Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.
2) Si $z_1, \dots, z_n$ sont les racines complexes du polynôme

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

alors $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.

3) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + \mathsf{i}\sqrt{3})^n$ soit purement imaginaire.
4) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - \mathsf{i}\sqrt{3})^n$ soit réel.

Ex-06-07: Soit (x_n) une suite croissante.

1) Montrer que si (x_n) possède une sous-suite majorée, alors (x_n) est majorée.
2) Montrer que si (x_n) possède une sous-suite qui tend vers l'infini, alors elle tend vers l'infini.

Ex-06-08: Parmi les séries ci-dessous, lesquelles convergent ?

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{1000}}$
2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n-1)!}{n!}$
3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-0.001n}$

4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{e^{2\log n}}$

Ex-06-09: Si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont convergentes, montrer que $\sum_n (a_n + b_n)$ est convergente, et que

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n \,.$$

Ex-06-10: Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celles qui convergent ou divergent, en les comparant (lorsque c'est possible) à d'autres séries connues.

1) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$

2) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+n}$

3) $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{n^2}{3n^2+3}\right)^n$

4) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n}}{n^2-1}$