

Ex-05-01: Déterminer, parmi les suites ci-dessous, celles qui sont bornées. Lorsqu'une suite est bornée, on donnera une sous-suite convergente, ainsi que la valeur de sa limite.

- | | |
|-------------------------|--|
| 1) $a_n = (-1)^n$ | 3) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$ |
| 2) $a_n = (-1)^{n^2-n}$ | 4) $a_n = \sin(n\frac{\pi}{3}) + \cos(n\frac{\pi}{2})$ |

Ex-05-02: Soit (a_n) une suite bornée. Vrai ou faux ?

- 1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a > 0$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
- 2) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) tend vers zéro.
- 3) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout n .
- 4) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \dots\}$, où $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$.

Ex-05-03: Considérer la suite $a_n := \sqrt{n}$.

- 1) Montrer que pour tout entier $p > 0$ fixé, on a que $|a_n - a_{n+p}| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- 2) Est-ce que (a_n) est une suite de Cauchy ?

Ex-05-04: Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

- 1) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout pour tout $n \geq 1$,
- 2) Montrer que (a_n) est décroissante,
- 3) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.
- 4) Faire un croquis qui illustre graphiquement ce qui se passe.

Ex-05-05:

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := 10$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

- 1) Montrer que $a_n > \sqrt{2}$ pour tout n .
- 2) Montrer que (a_n) est décroissante.
- 3) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Ex-05-06: Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ par $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que dans chacun des cas la suite converge, et calculer sa limite.

- | | |
|---|---|
| 1) $g(x) := \frac{1}{4}(3x + 1)$, $a_1 := 0$, | 3) $g(x) := \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$, $a_1 := 1$, |
| 2) $g(x) := \frac{1}{4}(x + 4)$, $a_1 := 3$, | 4) $g(x) := 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, $a_1 := \frac{3}{2}$. |

Ex-05-07: Décrire le comportement des suites $x_{n+1} = g(x_n)$ ci-dessous dans la limite $n \rightarrow \infty$, *qualitativement*, uniquement à l'aide de l'interprétation graphique de la trajectoire. On considérera en particulier le comportement en fonction du choix de la condition initiale.

- 1) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{3-x}{2}$.
- 2) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := 2x - 5$.
- 3) $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $g(x) := \frac{1}{x}$.
- 4) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := 4 - x$.
- 5) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := x^2 + 1$.
- 6) $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $g(x) := x^2$.
- 7) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \cos(x)$.
- 8) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Ex-05-08: Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

1) $(2 - 3i)(3 + 2i)$	5) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} +$	7) $\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$
2) $\frac{2-3i}{4-5i}$	$\frac{1}{1+3i}$	8) $\frac{3i^{30}-i^{19}}{-1+2i}$
3) $(\frac{1}{i})^{4567}$		
4) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$	6) $\frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i}$	9) $(\frac{10-15i}{2+i})(\frac{1+i}{1-3i})$

Ex-05-09: Trouver le module et un argument pour les nombres complexes suivants.

1) $2 + 2i$	3) $-1 + i \tan(3)$	4) $\frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$
2) $-1 + i\sqrt{3}$		

Ex-05-10: Calculer le module des nombres complexes suivants.

1) e^{i+1}	3) $e^{-(i-1)}$	5) $e^{(1-50i)}$
2) $e^{-(i+1)}$	4) $e^{(i-50)}$	