

**Ex-05-01:** Déterminer, parmi les suites ci-dessous, celles qui sont bornées. Lorsqu'une suite est bornée, on donnera une sous-suite convergente, ainsi que la valeur de sa limite.

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| 1) $a_n = (-1)^n$       | 3) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$                              |
| 2) $a_n = (-1)^{n^2-n}$ | 4) $a_n = \sin(n\frac{\pi}{3}) + \cos(n\frac{\pi}{2})$ |

**Ex-05-02:** Soit  $(a_n)$  une suite bornée. Vrai ou faux ?

- 1) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a > 0$ , alors  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .
- 2) Si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , alors  $(a_n)$  tend vers zéro.
- 3) Si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , alors  $a_n \leq 0$  pour tout  $n$ .
- 4)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \dots\}$ , où  $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ .

**Ex-05-03:** Considérer la suite  $a_n := \sqrt{n}$ .

- 1) Montrer que pour tout entier  $p > 0$  fixé, on a que  $|a_n - a_{n+p}| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- 2) Est-ce que  $(a_n)$  est une suite de Cauchy ?

**Ex-05-04:** Considérer la suite  $(a_n)$  définie par  $a_1 := \frac{5}{2}$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

- 1) Montrer que  $2 \leq a_n \leq 3$  pour tout  $n \geq 1$ ,
- 2) Montrer que  $(a_n)$  est décroissante,
- 3) Conclure que  $(a_n)$  converge et calculer sa limite.
- 4) Faire un croquis qui illustre graphiquement ce qui se passe.

**Ex-05-05:**

Considérer la suite  $(a_n)$  définie par  $a_1 := 10$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

- 1) Montrer que  $a_n > \sqrt{2}$  pour tout  $n$ .
- 2) Montrer que  $(a_n)$  est décroissante.
- 3) Conclure que  $(a_n)$  converge et calculer sa limite.

**Ex-05-06:** Soient  $a_1 \in \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  par  $a_{n+1} = g(a_n)$  pour  $n \geq 1$ . Montrer que dans chacun des cas la suite converge, et calculer sa limite.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $g(x) := \frac{1}{4}(3x + 1)$ , $a_1 := 0$ , | 3) $g(x) := \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$ , $a_1 := 1$ ,                 |
| 2) $g(x) := \frac{1}{4}(x + 4)$ , $a_1 := 3$ ,  | 4) $g(x) := 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ , $a_1 := \frac{3}{2}$ . |

**Ex-05-07:** Décrire le comportement des suites  $x_{n+1} = g(x_n)$  ci-dessous dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , *qualitativement*, uniquement à l'aide de l'interprétation graphique de la trajectoire. On considérera en particulier le comportement en fonction du choix de la condition initiale.

- 1)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \frac{3-x}{2}$ .
- 2)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := 2x - 5$ .
- 3)  $x_0 \in \mathbb{R}^*, g(x) := \frac{1}{x}$ .
- 4)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := 4 - x$ .
- 5)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := x^2 + 1$ .
- 6)  $x_0 \in \mathbb{R}_+, g(x) := x^2$ .
- 7)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \cos(x)$ .
- 8)  $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

**Ex-05-08:** Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

- 1)  $(2 - 3i)(3 + 2i)$
- 2)  $\frac{2 - 3i}{4 - 5i}$
- 3)  $(\frac{1}{i})^{4567}$
- 4)  $(1 + i\sqrt{3})^{10}$
- 5)  $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i}$
- 6)  $\frac{2 - 3i}{2 + i} + \frac{1 - i}{1 + 3i}$
- 7)  $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$
- 8)  $\frac{3i^{30} - i^{19}}{-1 + 2i}$
- 9)  $(\frac{10 - 15i}{2 + i})(\frac{1 + i}{1 - 3i})$

**Ex-05-09:** Trouver le module et un argument pour les nombres complexes suivants.

- 1)  $2 + 2i$
- 2)  $-1 + i\sqrt{3}$
- 3)  $-1 + i \tan(3)$
- 4)  $\frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1 - i}$

**Ex-05-10:** Calculer le module des nombres complexes suivants.

- 1)  $e^{i+1}$
- 2)  $e^{-(i+1)}$
- 3)  $e^{-(i-1)}$
- 4)  $e^{(i-50)}$
- 5)  $e^{(1-50i)}$