Ex-04-01: Donner, s'il y en a, un ou plusieurs exemples explicites (c'est-à-dire : on définira explicitement chaque terme) de suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ possédant les propriétés suivantes.

1) Strictement croissante, tendant vers $\sqrt{2}$.
2) Possédant une infinité de termes plus grands que 3, et une infinité de termes plus petits que 2.
3) Majorée, pas minorée, pas monotone.
4) Majorée, minorée, divergente, dont tous les termes sont strictement négatifs.
5) Croissante, divergente, dont tous les termes sont strictement négatifs.
6) Convergente, pas monotone, dont tous les termes sont strictement positifs.
7) Convergente, possédant une infinité de termes strictement positifs, et une infinité de termes strictement négatifs.
8) Convergente, possédant une infinité de termes plus grands ou égaux à 1, et une infinité de termes négatifs.
9) Tendant vers $+\infty$, avec une infinité de termes strictement négatifs.
10) Tendant vers $+\infty$, pour laquelle il n'existe aucun N tel que $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \geqslant N$.
11) N'ayant que des termes irrationnels, possédant une infinité de termes $\leqslant 0$, et telle que $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$.

Ex-04-02: Soit (a_n) une suite d'entiers, monotone et bornée. Montrer que a_n devient constante pour n grand.

Ex-04-03: Calculer les limites $n \to \infty$ des suites ci-dessous, qui sont toutes des indéterminations "1^∞".

1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
2) $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
3) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Ex-04-04: *Problème de l'échiquier de Sissa* : "On place un grain de riz (ou de blé) sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc.), combien de grains obtient-on au total ?"

Ex-04-05: Calculer les sommes suivantes. (On suppose partout que $|r| < 1$.)

1) $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} r^k \ (N \in \mathbb{N}^*)$
2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{7^k}$
3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k}$
4) $1 - r^3 + r^5 - r^7 + r^9 + \cdots$
5) $r + r^2 - r^3 + r^4 + r^5 - r^6 + r^7 + r^8 - r^9 + \cdots$
6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^k}{3}\right)^k$

Ex-04-06: Étudier la limite $n \to \infty$ pour les suites données ci-dessous.

1) $n^2 \cos(\frac{1}{n^2}) \sin(\frac{1}{n^3})$
2) $\dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$
3) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$
4) $(-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$
5) $\dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$
6) $\dfrac{\sin(\sqrt{n^3 + n^2 + 1})}{n^3 + n^2 + 1}$
7) $\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 - 3n}$
8) $\sqrt{n}(\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3 + 1})$

Ex-04-07: Soit (a_n) la suite

$$a_n := \sqrt{\alpha n^2 + \beta n} - \sqrt{\delta n^2 + \gamma n}\,,$$

où $\alpha, \delta > 0$, et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

Discuter du comportement de a_n lorsque $n \to \infty$, en fonction des paramètres.

Ex-04-08: Étudier la limite $n \to \infty$ des suites ci-dessous.

1) $b_n = \log(n+1) - \log(n-1)$
2) $c_n = \dfrac{\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
3) $e_n = \sqrt{n}\sqrt{n+1} - n$
4) $f_n = \sqrt[n]{n}$
5) $g_n = \sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})$
6) $l_n = n \cdot \sin(\frac{2n+3}{n^3})$

Ex-04-09: Étudier la limite $n \to \infty$ des suites ci-dessous.

1) $a_n = \dfrac{n^{23/47} - \sqrt{n}}{e^{\frac{1}{2}\log n} - 2\log(n)}$
2) $d_n = \dfrac{n^n}{7^{\log(n)}}$
3) $h_n = \dfrac{n^3}{7^n} \cos(\sqrt{n})$
4) $i_n = 3^n e^{-3n}$
5) $j_n = n^{100} e^{-3(\log(n))^2}$
6) $k_n = \dfrac{e^{\sqrt{(\log n)^2 - 3\log n}}}{7n}$

Ex-04-10: Soit (a_n) définie par $a_n := (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$, $n \geqslant 1$. Considérer les suites (M_n) et (m_n) introduites au cours.

1) Donner M_n et m_n explicitement (en fonction de n).
2) Vérifier que M_n (resp. m_n) est décroissante (resp. croissante), minorée (resp. majorée), et donner sa limite.
3) Calculer $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Ex-04-11: Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$ pour les suites (x_n) définies ci-dessous.

1) $x_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n}$
2) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ si n est impair, $x_n := (-1)^{n/2}$ si n est pair
3) $x_n = (-1)^n + \sin(n\frac{\pi}{2})$