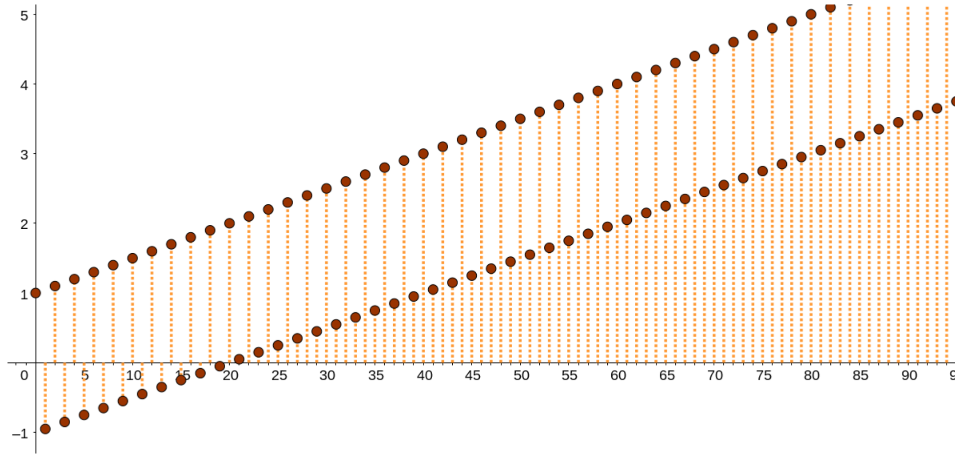
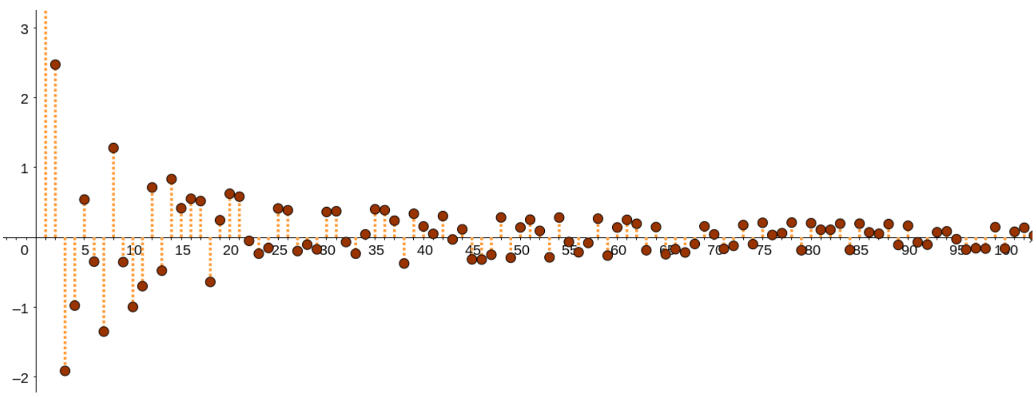
Ex-03-01:

1) Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite dont le graphe est le suivant :



Pour cette suite, donner explicitement
   (a) l'ensemble $A = \{n : x_n < 0\}$
   (b) l'ensemble $B = \{n : x_n \geqslant 1\}$.
   (c) l'ensemble $C = \{n : |x_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}\}$.
   (d) un entier N tel que $x_n > 2$ pour tout $n \geqslant N$.

2) Soit (y_n) la suite dont le graphe est le suivant :



Pour cette suite, donner
   (a) l'ensemble $A' = \{n : y_n \geqslant 1\}$.
   (b) l'ensemble $B' = \{n : |y_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}\}$.
   (c) un entier N tel que $|y_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant N$.
   (d) l'ensemble $C' = \{n : |y_n| \leqslant \frac{1}{2}\}$.
   (e) un entier N tel que $|y_n| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant N$.

Ex-03-02: Soit (x_n) la suite dont le terme général est défini par

$$x_n := \frac{an+b}{cn+d},$$

où a, b, c, d sont des constantes positives. Montrer que (x_n) est croissante si et seulement si $ad - bc \geqslant 0$.

Ex-03-03: Pour chacune des suites ci-dessous, montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ (en le donnant explicitement) tel que $|a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

1) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
2) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\ell = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$,
3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\ell = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$,
4) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $\ell = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Ensuite, pour la suite définie par $a_n = \frac{2n}{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, prendre $\varepsilon = \frac{3}{4}$ et donner l'ensemble des entiers $n \geqslant 0$ pour lesquels $|a_n - 1| \leqslant \varepsilon$. Représenter graphiquement le résultat.

Ex-03-04: Montrer que si (a_n) est une suite telle que

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = L \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = L\,,$$

alors $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ex-03-05: Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie ainsi :

$$x_1 = 0.9\,, \quad x_2 = 0.99\,, \quad x_3 = 0.999\,, \quad x_4 = 0.9999\,, \qquad \text{etc.}$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Ex-03-06: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d > 0$, et soit $x_n := \frac{an+b}{cn+d}$. *À l'aide de la définition de limite*, montrer que

1) Si $a = 2, b = -3, c = 3, d = 7$, alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}\,.$$

2) En général, quels que soient a, b, c, d,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{c}\,.$$

Ex-03-07: Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont équivalentes à "$a_n \to L$".

1) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
2) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
3) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant \frac{1}{j}$ pour tout $n \geqslant N$.
4) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant C\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
5) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon^2$ pour tout $n \geqslant N$.

Ex-03-08: Soit (a_n) une suite réelle. Vrai ou faux ?

1) Si (a_n) est croissante, alors (a_n^2) est croissante.
2) Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.
3) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
5) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

6) Si (a_n) converge, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leqslant \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = M > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +M$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -M$.

9) Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, et si $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, alors $a_n \leqslant L$ pour tout n.

10) Si a_n est décroissante et $b_n \to 0$, alors $a_n b_n$ est décroissante.

Ex-03-09: Étudier la limite $n \to \infty$ des suites (a_n) ci-dessous, en utilisant explicitement le Théorème des deux gendarmes :

1) $a_n = \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ 2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 3) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^n}$

Ex-03-10:

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$1 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}\,.$$

2) Utiliser ces inégalités, ainsi que le Théorème des deux gendarmes, pour calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}\,.$$

Ex-03-11: Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$, $n \geqslant 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} a_n$, à l'aide de la définition de limite. Ensuite, en utilisant uniquement les propriétés de la limite, calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$

2) $\lim_{n\to\infty} (\dfrac{a_n}{3} + \dfrac{3}{a_n})$

3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{9n^2}{n^2+4n+4}$

Ex-03-12: Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble majoré, et $s := \sup A$. Montrer qu'il existe une suite (x_n) qui satisfait simultanément aux deux conditions suivantes :

1) $x_n \in A$ pour tout n,

2) $x_n \to s$.