Ex-01-01: Sans faire de calculs, donner l'ensemble image des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

1) $-2x+1$, $D=\mathbb{R}$
2) $-2x+1$, $D=[-1,1]$
3) x^p ($p \in \mathbb{Z}^*$ impair), $D=\mathbb{R}$
4) x^p ($p \in \mathbb{Z}^*$ pair), $D=\mathbb{R}$
5) x^2+1, $D=\mathbb{R}$
6) $1-x^2$, $D=\mathbb{R}$
7) x^2+2x, $D=\mathbb{R}$
8) $\tan x$, $D=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
9) $\sin x$, $D=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
10) $\cos x$, $D=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
11) $\frac{1}{3}\sin x$, $D=\mathbb{R}$
12) $\begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{si } x<0 \end{cases}$ $D=\mathbb{R}$

Ex-01-02: Montrer que chaque fonction ci-dessous est bijective, et donner sa réciproque.

1) $f:[0,1]\to[-3,-2]$, $f(x)=x-3$.
2) $g:[0,1]\to[0,1]$, $g(x)=x^2$.
3) $h:[-1,0]\to[0,1]$, $h(x)=x^2$.

Ensuite, esquisser le graphe de chacune de ces fonctions, ainsi que de leurs réciproques.

Ex-01-03: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective et impaire. Montrer que sa réciproque $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est aussi impaire.

Ex-01-04: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+25}\,.$$

Calculer $\mathrm{Im}(f)$. Ensuite, déterminer le nombre de préimages pour chaque $y\in\mathrm{Im}(f)$.

Ex-01-05: Montrer que la fonction ci-dessous est une bijection, puis donner sa réciproque.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}_+^* \\ x&\mapsto\frac{3^x+2}{3^{-x}} \end{aligned}$$

Ex-01-06: Pour chacun des ensembles C ci-dessous, donner un exemple explicite de bijection $f:]0,1[\to C$.

1) $C=]0,b[$, où $b>0$.
2) $C=]a,b[$, où $a<b$.
3) $C=]0,\infty[$
4) $C=]-\infty,\infty[$
5) $C=[0,1]$ (facultatif!)

Ex-01-07: Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

1) $f\circ g=g\circ f \quad\Leftrightarrow\quad f=g$.
2) Si f et g sont injectives, alors $f\circ g$ est injective.
3) Si $f\circ f$ est injective, alors f est injective.
4) Si $f\circ g$ est injective, alors g est injective.

5) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.

6) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Ex-01-**08**: Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Ensuite, donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2)$.

Ex-01-**09**: Montrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, que $n^3 + 5n$ est un multiple de 3.

Ex-01-**10**: Démontrer l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx\,, \quad \forall x \geqslant -1\,.$$

Ex-01-**11**: Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit le **nombre de Fermat** $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Démontrer, pour $n \geqslant 1$, l'identité

$$F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Ex-01-**12**: Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\tfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$