Durée : 60 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse I
Test intermédiaire
Automne 2017

– Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

– Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \dfrac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

- ☐ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{-3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)\right\}$
- ☐ $\left\{3\,\mathrm{i}\,,\ \frac{3}{2}\big(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\,,\ -\frac{3}{2}\big(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)\right\}$

Question 2 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ $a_n = 2^{n+1} - 1\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 1 + \frac{1}{3}n(n^2+5)\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = 2n + 1\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $a_n = (n+1)^2 - n\,,\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 3 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie par

$$a_n = \frac{\sqrt[3n]{4} - 6\,\sqrt[3n]{2} + 9}{\sqrt[2n]{9} - 4\,\sqrt[2n]{3} + 4}\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{4}{9}$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{9}{4}$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$
- ☐ la suite diverge

Question 4 : Soit la suite de nombres réels (a_n) définie récursivement par

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{a_n^2}{3}\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$
- ☐ la suite ne converge pas
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 5 : La série numérique définie par $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

- ☐ converge vers un nombre réel s tel que $s<3$
- ☐ diverge, mais la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ converge
- ☐ diverge
- ☐ converge vers un nombre réel s tel que $s\geq 3$

Question 6 : Soit la série avec un paramètre $t\in\mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\big(\cos(t\pi)\big)^n .$$

Alors

- ☐ la série converge pour tout $t\notin\mathbb{Z}$
- ☐ la série diverge pour tout $t\in\mathbb{R}$
- ☐ la série converge pour tout $t\in\mathbb{R}$
- ☐ la série converge pour un nombre fini de valeurs de t

Question 7 : Soit $p\in\mathbb{R}$ un nombre quelconque.

- ☐ La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Log}(n+2)}{(n+1)^p}$ diverge pour tout $p>0$
- ☐ La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge absolument pour tout $p>0$
- ☐ La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^p(n+2)^p}$ converge pour tout $p>0$
- ☐ La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge pour tout $p>0$

Question 8 : Soit l'ensemble borné non vide $A=\left\{x\in[0,4\pi]:\cos(x)<\dfrac{1}{4}\right\}$

et $b=\mathrm{Sup}\,A$. Alors

☐ $\cos(b)=\frac{1}{4}$ ☐ $\cos(b)<\frac{1}{4}$ ☐ $\sin(b)=\frac{1}{4}$ ☐ $b<2\pi$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soit deux sous-ensembles bornés non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$ et $A \neq B$. Alors $\operatorname{Sup} A < \operatorname{Sup} B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $x_n \leq y_n$ pour tout n pair,

(ii) $x_n \geq y_n$ pour tout n impair.

Si la suite (x_n) converge, alors la suite (y_n) converge aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit (a_n) une suite convergente de nombres réels. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$ on a $|a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit deux suites bornées de nombres réels (x_n) et (y_n) telles que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sup y_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est une série numérique convergente et (b_n) est une suite bornée de nombres réels, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est une série numérique convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Si une fonction $f\colon \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX