Durée : 67 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse I

Test intermédiaire
Automne 2016

SCIPER: **12345678**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la suite numérique bornée (x_n) définie par $x_n = \dfrac{5+3^{n+1}}{1+(-3)^n}$. Alors

- [ ] $\lim_{n\to+\infty} \inf x_n = -7$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = 4$
- [ ] la suite (x_n) converge
- [x] $\lim_{n\to+\infty} \inf x_n = -3$

Question 2 : La limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ vaut

- [ ] e
- [ ] 1
- [x] e^{-2}
- [ ] 0

Question 3 : Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [x] $\operatorname{Sup} E = 1$ et $\operatorname{Inf} E = \dfrac{1}{2}$
- [ ] $\operatorname{Sup} E \notin E$ et $\operatorname{Inf} E \notin E$
- [ ] $\operatorname{Sup} E = 1$ et $\operatorname{Inf} E = 0$
- [ ] $\operatorname{Sup} E = 2$ et $\operatorname{Inf} E = \dfrac{1}{2}$

Question 4 : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \, k$.

Alors on a

- [ ] $S_n = n$
- [x] $S_n = -n-1$
- [ ] $S_n = -1$
- [ ] $S_n = -n$

Question 5 : Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n!)^d}{(d\cdot n)!}$.

- [ ] La série converge uniquement pour $d = 2$
- [ ] La série converge pour tout d
- [ ] La série diverge pour tout $d \leq 5$
- [x] La série converge pour tout $d \geq 2$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{\sin(2x)}$.
S'il existe, soit $g\colon \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right] \to \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de f.
Alors

- ☐ f n'admet pas de prolongement par continuité en 0
- ☐ g existe et $g(0) = 1$
- ■ g existe et $g(0) = \dfrac{3}{2}$
- ☐ g existe et $g(0) = \dfrac{1}{2}$

Question 7 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x + \mathrm{i}y \neq \mathrm{i}$, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ vérifie

- ☐ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{\mathrm{i}-z}\right) = \dfrac{-2xy(1-y) + x(x^2-y^2)}{x^2+(1-y)^2}$
- ☐ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{\mathrm{i}-z}\right) = \dfrac{-2xy(1+y) - x(x^2-y^2)}{x^2+(1+y)^2}$
- ■ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{\mathrm{i}-z}\right) = \dfrac{2xy(1-y) - x(x^2-y^2)}{x^2+(1-y)^2}$
- ☐ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{\mathrm{i}-z}\right) = \dfrac{2xy(1+y) + x(x^2-y^2)}{x^2+(1+y)^2}$

Question 8 : La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$

- ☐ diverge et la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+n}$ converge
- ☐ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n} > 6$
- ■ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n} < 3$
- ☐ diverge et la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+n}$ diverge

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit la suite (x_n) définie de manière récursive par $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout choix de x_0, la suite (x_n) est convergente.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit (a_n) une suite de nombres réels avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors la composition $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image de f est un intervalle ouvert.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 13 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs, telles que $0 < a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite (b_n) converge, alors la suite (a_n) converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 14 : La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + e^x$ est bijective.

■ VRAI ☐ FAUX