













Ens: D. Strütt  
Analyse I - SV  
automne 2025  
1 heure

# 412199

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		

## Correction

### Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si  $\lambda \in I$ , où  $I$  est l'ensemble

☐  $] -\infty, -1[$       ☒  $] -\infty, 0[$       ☐  $[-1, +\infty[$       ☐  $] -\infty, 0]$

**Question 2 :** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $u_0 = \sqrt{3}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$ . Alors

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$       ☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$       ☒  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$       ☐  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge

**Question 3 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

☐  $\inf A = 2$       ☐  $\inf A = \frac{1}{2}$   
☐  $A$  n'est pas minoré      ☒  $\inf A = 0$

**Question 4 :** Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

☐  $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$       ☐  $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$   
☒  $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$       ☐  $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$

**Question 5 :** Soit, pour  $a_0 \in \mathbb{R}$ , la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie pour  $n \geq 1$  par  $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$ .

☐ Si  $a_0 < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .      ☒ Si  $a_0 = 0$ , la suite est convergente.  
☐ Si  $a_0 > 1$ , la suite est croissante.      ☐ Si  $a_0 < 1$ , la suite est décroissante.

Correction

**Question 6 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ , et  $(b_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos \left( n \frac{\pi}{2} \right), \quad n \geq 0.$$

Alors

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

☒  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

**Question 7 :** Soit la suite

$$x_n = e^{2\sqrt{n^2+1}-n}.$$

Alors,

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$

☒  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ +\infty}} x_n$

$=$  ☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

**Question 8 :** La série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

☐ ne converge pas et ne converge pas absolument

☒ converge et converge absolument

☐ ne converge pas mais converge absolument

☐ converge mais ne converge pas absolument

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9 :** Soient  $A, B \subset \mathbb{R}$  deux ensembles non vides et bornés, et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\sup\{x + c : x \in A\} - \sup\{x + c : x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 10 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < a_n < b_n$ . Si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge, alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  converge.

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 11 :** Les racines du polynôme  $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$  sont  $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 12 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 3$ . Alors  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 13 :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par

$$a_n = \left( \frac{\lambda + n}{\lambda n} \right)^n.$$

Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $(a_n)$  converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

☐ VRAI      ☒ FAUX