

Sacha Friedli
Analyse I - GM
Novembre 2024
1 h

Blank

SCIPER: **999000**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la série avec paramètre $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}.$$

Alors la série converge si et seulement si

- $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]e, +\infty[$
 $x \in]e, +\infty[$
 $x \in]\frac{1}{e}, 1[\cup]1, e[$
 $x \in]0, \frac{1}{e}[$

Question 2 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Question 3 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
 Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
 Si $a_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.
 Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

Question 4 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, et soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Alors :

- $\inf A = -1$ et $\sup A = \frac{3}{2}$
 $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$
 $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$
 $\inf A = 0$ et $\sup A = \frac{3}{2}$

Question 5 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{6}{5}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

Question 6 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}.$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{2}$

Question 7 : Une des solutions de l'équation $z^5 = (1 + \sqrt{3}i)^2$ est

- $z = \sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right) \right)$
 $z = \sqrt[5]{4} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \right)$
 $z = \sqrt[5]{4} \left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right) \right)$
 $z = \sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \right)$

CORRECTION

Question 8 : Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \frac{k+2}{k^3}$ et soit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Alors :

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient A et B deux sous-ensembles bornés non-vides de \mathbb{R} . Si $\inf A > \sup B$, alors $A \cap B$ est vide.

VRAI FAUX

Question 10 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement négatifs. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si et seulement si elle converge.

VRAI FAUX

Question 11 : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$. Alors $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) = 0$.

VRAI FAUX

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

VRAI FAUX

Question 13 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = f(a_{n-1})$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

VRAI FAUX