

# Chapitre 3

## Suites réelles

### 3.1 Définitions et exemples

(ici, Video: [v\\_suites\\_intro.mp4](#))

#### 3.1.1 Définition

**Définition 3.1.** Une **suite** est une famille infinie ordonnée de réels, indexée par des entiers :

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$$

On utilisera la notation compacte suivante :  $(a_n)_{n \geq n_0}$

Une suite peut commencer par un indice  $n_0$  quelconque, mais le plus souvent on considérera  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ . Quand le premier indice n'importe pas ou peu (ce qui sera le cas lorsqu'on étudiera le comportement de  $a_n$  pour des indices  $n$  *grands*), on écrira parfois  $(a_n)$  au lieu de  $(a_n)_{n \geq n_0}$ .

#### 3.1.2 Représentations

On se représente en général une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  de deux façons.

La façon la plus simple est de la représenter simplement comme un ensemble de points sur la droite,  $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  :

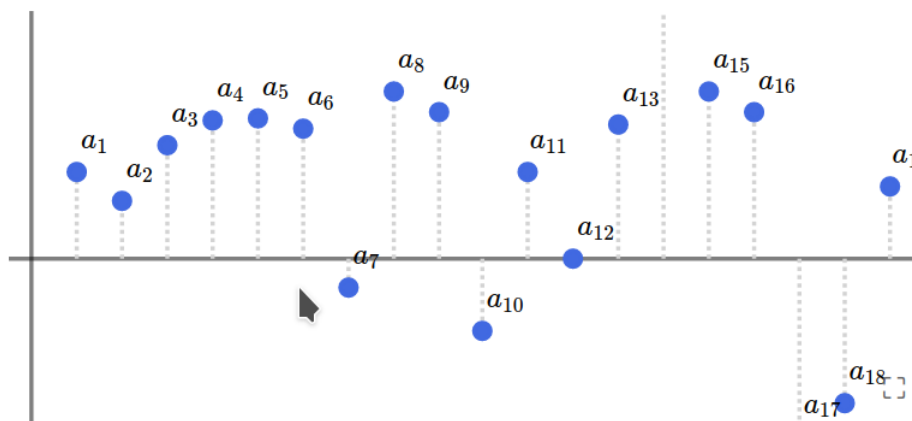


Du fait que cet ensemble est ordonné, cette image peut aussi s'interpréter comme une *trajectoire* : une particule est au point  $a_1$  au temps  $n = 1$ , puis au point  $a_2$  au temps  $n = 2$ , etc.

Mais une façon plus intuitive de se représenter une suite est de la voir comme le graphe d'une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) := a_n. \end{aligned}$$

Ceci revient à représenter les paires de points  $(n, f(n)) = (n, a_n)$  dans le plan cartésien :



### 3.1.3 Exemples

Souvent, une suite est définie simplement en disant comment le  $n$ -ème terme  $a_n$  se calcule explicitement en fonction de l'indice  $n$ . Lorsqu'une suite est définie ainsi, chaque terme peut être calculé directement, indépendamment des autres, à l'aide d'une formule.

**Exemple 3.2.** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie ainsi : pour chaque  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{3n^3 + n - 5}{5n^2 + 7}.$$

Dans cet exemple,  $a_{10'000}$  peut se calculer directement, sans avoir forcément besoin de calculer les autres. ◇

**Exemple 3.3.** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$ , définie ainsi :  $a_0 = \frac{1}{3}$ , puis pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n = 4a_{n-1}(1 - a_{n-1}).$$

Cette suite est définie *par récurrence* : à part le premier, chaque terme est défini en fonction du précédent. Donc on ne peut calculer  $a_{10'000}$  que si on a déjà calculé  $a_{9'999}$ ,  $a_{9'998}$ , etc. Ce type de suite sera étudié dans un chapitre à part. ◇

On peut définir une suite de façon tout à fait arbitraire, ce qui mène rapidement à des suites difficiles à étudier :

**Exemple 3.4.** Considérons l'expansion décimale du nombre  $\pi$ ,

$$\pi = 3.1415926535897932384626433 \dots,$$

et définissons la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ , comme suit :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 5, \quad a_5 = 9, \quad a_6 = 2, \quad \dots$$

Plus précisément :  $a_n$  est l'entier représentant le  $n$ -ème chiffre après la virgule dans l'expansion décimale de  $\pi$ . Une suite facile à définir, mais très difficile à étudier... ◇

**Informel 3.5.** Donc plus tard, quand on dira "soit  $(a_n)$  une suite", il faudra garder à l'esprit que cela signifie que chacun de ses terme est bien défini, mais qu'un terme n'a pas forcément de lien avec les autres.

### 3.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

(ici, Video: [v\\_suites\\_particulieres.mp4](#))

Une propriété simplificatrice, pour une suite, est que ses termes ne soient globalement pas trop grands :

**Définition 3.6.** Une suite  $(a_n)$  est

- ★ **majorée** si il existe une constante  $M$  telle que  $a_n \leq M$  pour tout  $n$ ,
- ★ **minorée** si il existe une constante  $m$  telle que  $a_n \geq m$  pour tout  $n$ ,
- ★ **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

**Informel 3.7.** Une suite bornée est une suite qui “vit” dans un intervalle, dans le sens où on peut trouver deux nombres finis  $m < M$  tels que

$$a_n \in [m, M] \quad \forall n.$$

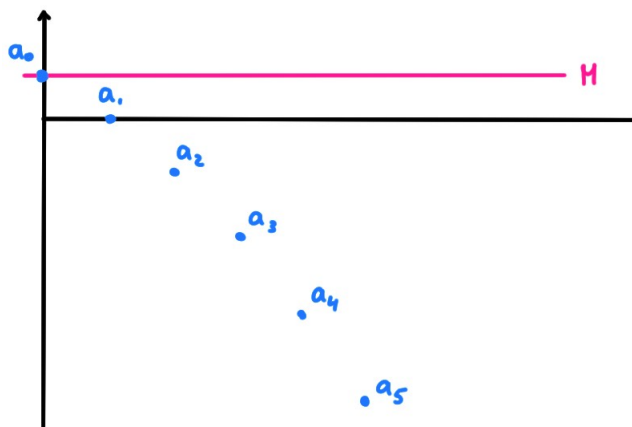
**Exemple 3.8.** Considérons la suite

$$a_n = 1 - n^2, \quad n \geq 0.$$

Alors  $(a_n)_{n \geq 0}$  est majorée. En effet,  $n^2 \geq 0$  pour tout  $n$ , et donc

$$a_n = 1 - n^2 \leq 1, \quad \forall n \geq 0.$$

et donc en prenant  $M = 1$ , on a  $a_n \leq M$  pour tout  $n$ .



Par contre,  $a_n$  n'est pas minorée (et donc pas bornée). En effet, montrons que pour toute constante  $m$ , il existe un indice  $n$  tel que  $a_n < m$ . Ceci est vrai lorsque  $m \geq 0$  puisque  $a_n \leq 0$  dès que  $n \geq 1$ . Si maintenant  $m < 0$ , alors  $a_n = 1 - n^2 < m$  si et seulement si  $n > \sqrt{1 - m}$  (on a simplement résolu l'inéquation). Donc en prenant n'importe quel entier  $n$  plus grand que  $\sqrt{1 - m}$ , on a bien que  $a_n < m$ . Ceci montre qu'il n'existe aucun minorant pour cette suite.  $\diamond$

**Exemple 3.9.** Considérons la suite

$$a_n = 2 \sin(5n + 1) - 3 \cos(\sqrt{n}), \quad n \geq 0.$$

Puisque

$$\begin{aligned} |a_n| &= |2 \sin(5n + 1) - 3 \cos(\sqrt{n})| \\ &\leq |2 \sin(5n + 1)| + |-3 \cos(\sqrt{n})| \\ &= 2|\sin(5n + 1)| + 3|\cos(\sqrt{n})| \\ &\leq 2 + 3 = 5, \end{aligned}$$

la suite est bornée :

$$-5 \leq a_n \leq +5, \quad \forall n.$$

◇

**Exemple 3.10.** La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ , où  $a_n := n^{\text{ème}}$  chiffre de l'expansion décimale de  $\pi$  en base 10, est bornée, car minorée par 0, et majorée par 9.

◇

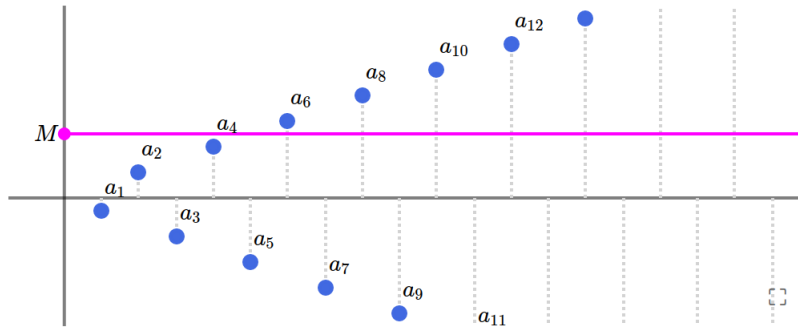
**Exemple 3.11.** La suite  $a_n = (-1)^n n$  n'est pas majorée. En effet, fixons un seuil  $M > 0$  (sous-entendu : aussi grand que l'on veut), et prenons un entier pair  $n = 2k$  quelconque, tel que  $k > M/2$ . On a alors

$$a_n = a_{2k} = (-1)^{2k} 2k = 2k > M.$$

Cette suite n'est pas minorée non plus. En effet, fixons un seuil  $m < 0$  (sous-entendu : aussi grand que l'on veut, négatif), et prenons un entier impair  $n = 2k + 1$  quelconque, tel que  $k > -(m - 1)/2$ . On a alors

$$a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} (2k + 1) = -(2k + 1) < m.$$

◇



### 3.1.5 Suites monotones

**Définition 3.12.** Une suite  $(a_n)$  est

- ★ **croissante** si  $a_n \leq a_{n+1}$  pour tout  $n$ ,
- ★ **strictement croissante** si  $a_n < a_{n+1}$  pour tout  $n$ ,
- ★ **décroissante** si  $a_n \geq a_{n+1}$  pour tout  $n$ ,
- ★ **strictement décroissante** si  $a_n > a_{n+1}$  pour tout  $n$ .

Si  $(a_n)$  satisfait une de ces propriétés, elle est dite **monotone**.

**Exemple 3.13.** La suite  $a_n = n^2$ ,  $n \geq 0$ , est strictement croissante puisque

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + \underbrace{2n+1}_{>0} > n^2 = a_n.$$

◇

**Exemple 3.14.** La suite **harmonique**  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ , est strictement décroissante puisque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

◇

**Exemple 3.15.** Considérons la suite  $a_n = \frac{n}{n+1}$ . On peut écrire

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1) - 1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

ce qui implique, puisque  $2 > 1$ ,

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = a_n,$$

et donc que  $(a_n)$  est croissante.

◇

### 3.1.6 Pourquoi étudier les suites ?

Les résultats que nous allons présenter dans les prochaines sections au sujet des suites seront d'importance capitale pour toute la suite de ce cours. En effet, l'étude des suites représente la porte d'entrée par laquelle plusieurs des difficultés de l'analyse sont abordées, de façon aussi élémentaire que possible. En particulier, on y discutera pour la première fois de la notion de *limite*, dans la section suivante, notion essentielle dans l'étude d'une fonction au voisinage d'un point.

**Informel 3.16.** Si on souhaite aborder quelques-unes des principales difficultés liées aux suites et à l'analyse, de manière informelle, en évitant le langage mathématique (qui est souvent responsable du blocage des novices), on pourra consulter le texte suivant : **Le marchand de billes** ([billes.pdf](#)).

## 3.2 Limite : $a_n \rightarrow L$

La notion centrale de l'analyse est celle de *limite*, et on va l'aborder ici pour la première fois, dans le cadre simple des suites réelles. Définir rigoureusement ce que signifie “tendre vers  $L$ ” est une des difficultés rencontrées dans ce cours. Nous allons donc commencer par le cas  $L = 0$  avant de passer au cas général.

### 3.2.1 Tendre vers zéro

(ici, Video: [v\\_suites\\_tendent\\_vers\\_zero.mp4](#))

Pour un réel  $x$ , “être proche de zéro” signifie que la distance qui le sépare de 0, à savoir  $\text{dist}(x, 0) = |x - 0| = |x|$ , est petite (dans un sens à définir). Donc pour voir si les valeurs d'une suite  $(a_n)$  s'approchent de zéro, il est naturel de considérer la distance

$$\text{dist}(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n|,$$

et de quantifier précisément ce qu'on entend par “cette distance devient toujours plus petite à mesure que  $n$  augmente”.

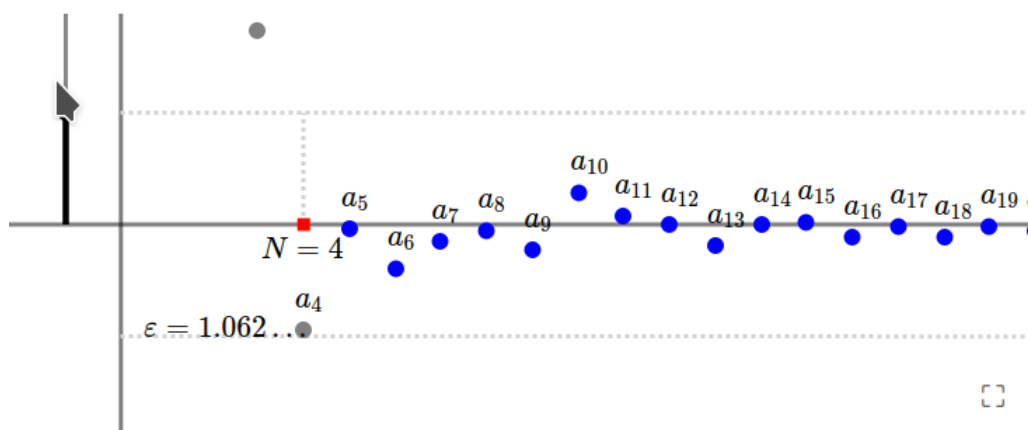
Une autre façon d'exprimer ce que l'on essaie de faire ici est de dire qu'une suite  $a_n$  tend vers zéro si ses éléments se concentrent dans des régions de plus en plus petites autour de zéro, à mesure que l'indice  $n$  augmente. La description rigoureuse d'un tel comportement est la suivante :

**Définition 3.17.** On dit qu'une suite  $(a_n)$  **tend vers zéro (lorsque  $n \rightarrow \infty$ )** si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  (qui dépend de  $\varepsilon$ ) tel que  $|a_n| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , c'est-à-dire tel que

$$a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall n \geq N.$$

On écrira alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , ou simplement  $a_n \rightarrow 0$ .

L'animation ci-dessous représente une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  qui tend manifestement vers zéro. On pourra choisir un  $\varepsilon > 0$  (slider vertical à gauche), et trouver un  $N$  tel que  $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  pour tout  $n \geq N$  :



**Exemple 3.18.** Considérons la suite

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Montrons que cette suite tend vers zéro, dans le sens défini ci-dessus.

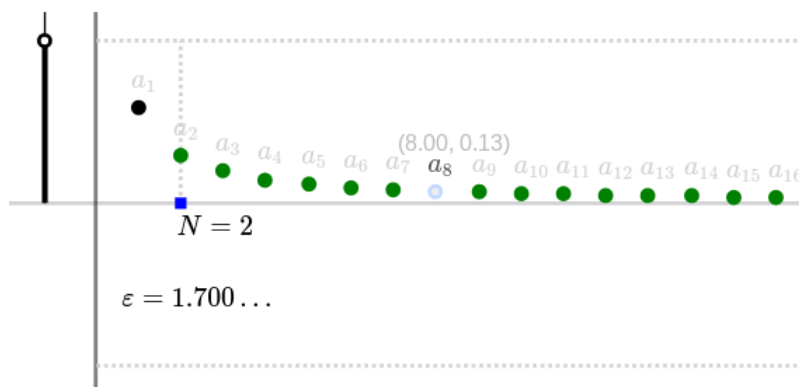
Fixons un  $\varepsilon > 0$ , et vérifions que l'on peut toujours trouver un entier  $N$  tel que

$$|a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Pour ce faire, remarquons que la condition  $|a_n| \leq \varepsilon$  est en fait équivalente à  $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ , et comme cette dernière est équivalente à  $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Pour l'entier  $N$ , on peut prendre n'importe quel entier plus grand ou égal à  $\frac{1}{\varepsilon}$ . On peut par exemple prendre (rappelons que  $\lfloor x \rfloor$  := partie entière de  $x$ ) :

$$N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

On a ainsi trouvé un entier  $N$  tel que  $n \geq N$  implique  $|a_n| \leq \varepsilon$ . ◇



**Informel 3.19.** On voit, dans ce dernier exemple, comme le  $N$  cherché dépend de  $\varepsilon$  ! Car en général, plus  $\varepsilon > 0$  est petit, plus il faut augmenter  $n$  pour faire rentrer  $a_n$  dans l'intervalle  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

### 3.2.2 Tendre vers $L \in \mathbb{R}$

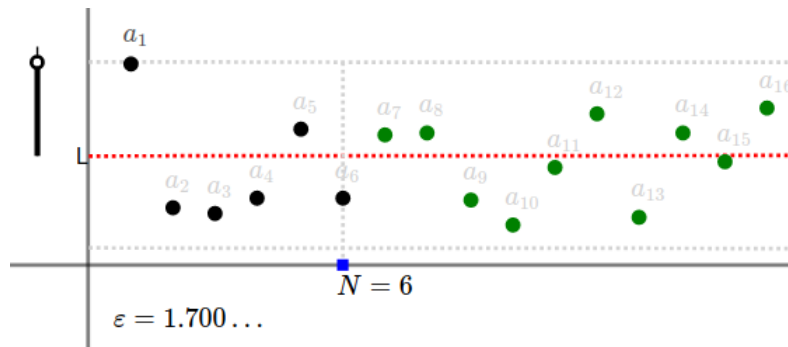
(ici, Video: [v\\_suites\\_tendent\\_vers\\_L.mp4](#))

La définition de “tendre vers  $L$ ” est seulement une adaptation de la définition de “tendre vers zéro” : pour que  $a_n$  tende vers  $L$ , il faut que la suite  $a'_n := a_n - L$  tende vers zéro.

**Définition 3.20.** Soit  $L \in \mathbb{R}$ . On dit qu’une suite  $(a_n)$  **tend vers  $L$  (lorsque  $n \rightarrow \infty$ )** si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier positif  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , c’est-à-dire tel que

$$a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon] \quad \forall n \geq N.$$

On dira alors que  $L$  est la **limite** de la suite  $(a_n)$ , et on écrira  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  ou simplement  $a_n \rightarrow L$ .



Lorsqu’il existe un  $L \in \mathbb{R}$  tel que  $(a_n)$  tend vers  $L$ , on dit que la suite **converge** ; si elle ne converge pas, on dit qu’elle **diverge**.

**Exemple 3.21.** Considérons la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$a_n = \frac{3n + 2}{2n + 1}.$$

Montrons, en utilisant la définition de limite donnée plus haut, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

Fixons donc un  $\varepsilon > 0$ , et vérifions que l’on peut trouver un entier  $N$  tel que

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

D’abord, écrivons explicitement la différence

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n + 2}{2n + 1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2(2n + 1)}.$$

On voit que cette dernière expression peut être rendue arbitrairement petite en prenant  $n$  suffisamment grand. Plus précisément : fixons un  $\varepsilon > 0$ . Une simple manipulation montre que

$$\frac{1}{2(2n + 1)} \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right).$$

Pour  $N$ , il suffit donc de prendre n’importe quel entier plus grand ou égal à  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right)$ . Pour être tout à fait précis, définissons (rappel :  $[x]$  = valeur entière de  $x$ )

$$N := \left\lfloor \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right) \right\rfloor + 1.$$

### 3.3. Propriétés de la limite

Par cette définition de  $N$ ,  $n \geq N$  implique que  $|a_n - \frac{3}{2}| \leq \varepsilon$ .

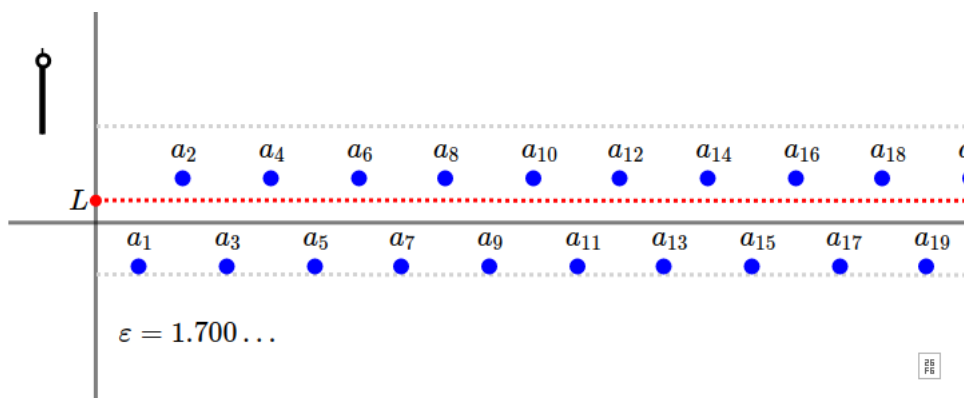
On a donc bien montré que  $(a_n)$  est convergente, et que sa limite vaut  $\frac{3}{2}$ .

Remarquons que peu importe comment il est choisi,  $N$  devient de plus en plus grand à mesure que  $\varepsilon > 0$  devient plus petit.  $\diamond$

**Exemple 3.22.** Considérons la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$a_n = (-1)^n.$$

Comme cette suite ne prend que les valeurs  $+1$  (lorsque  $n$  est pair) et  $-1$  (lorsque  $n$  est impair), elle est nécessairement divergente. En effet, pour n'importe quel  $L \in \mathbb{R}$ , si  $\varepsilon > 0$  est pris suffisamment petit (en fait : si  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ), alors il existe forcément une infinité d'indices  $n$  tels que  $a_n \notin [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ .  $\diamond$



### 3.3 Propriétés de la limite

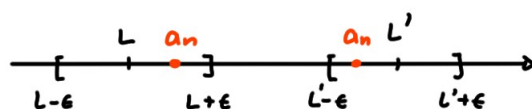
(ici, Video: [v\\_suites\\_proprietes.mp4](#))

Le calcul de limites sera grandement facilité par l'utilisation des *propriétés générales* satisfaites par les suites convergentes, que nous commençons à décrire maintenant.

La première propriété dit qu'une suite ne peut pas tendre vers deux limites différentes :

**Lemme 11.** *Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.*

*Preuve:* Supposons, par l'absurde, que  $a_n \rightarrow L$  et  $a_n \rightarrow L'$ , avec  $L \neq L'$ . Si on suppose par exemple que  $L < L'$ , alors on peut toujours prendre un  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, de manière à ce que les intervalles  $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  et  $[L' - \varepsilon, L' + \varepsilon]$  soient disjoints :



Plus concrètement, on peut garantir que ces intervalles sont disjoints en prenant par exemple

$$\varepsilon := \frac{L' - L}{3}.$$

Maintenant,

- ★ Comme  $a_n \rightarrow L$ , il existe  $N$  tel que  $a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  pour tout  $n \geq N$ .
- ★ Comme  $a_n \rightarrow L'$ , il existe  $N'$  tel que  $a_n \in [L' - \varepsilon, L' + \varepsilon]$  pour tout  $n \geq N'$ .

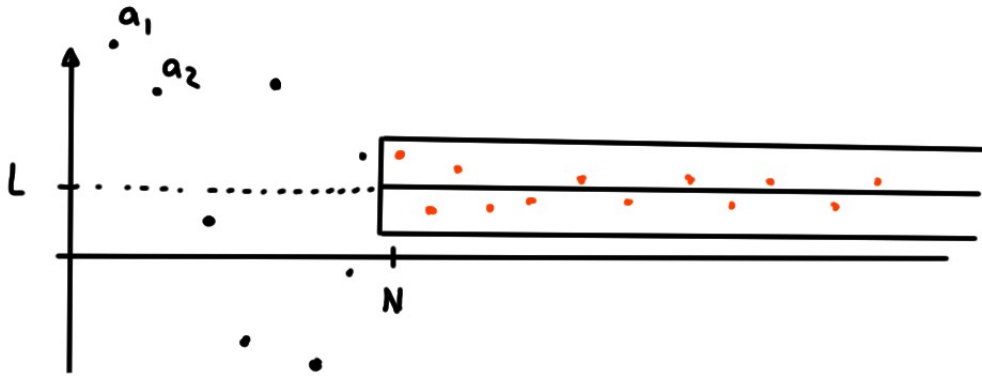


Cela implique que pour  $n \geq \max\{N, N'\}$ ,  $a_n$  doit être dans les deux intervalles en même temps, une contradiction puisque ces intervalles sont disjoints.  $\square$

La deuxième est que les valeurs des termes d'une suite convergente ne peuvent pas devenir trop grands :

**Lemme 12.** *Si une suite converge, alors elle est bornée.*

*Preuve:* Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite convergente. Nommons  $L$  sa limite. La convergence de  $a_n$  vers  $L$  implique en particulier que l'on peut fixer, par exemple,  $\varepsilon := 1$ , et considérer l'entier  $N$  tel que  $a_n \in [L - 1, L + 1]$  pour tout  $n \geq N$  :



En particulier on a, pour tout  $n \geq N$ , que  $L - 1 \leq a_n \leq L + 1$ . Si on définit maintenant

$$M := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L + 1\}$$

$$m := \min\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L - 1\},$$

alors on a bien garanti que  $m \leq a_n \leq M$  pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

**Lemme 13.** *Si  $a_n \rightarrow L$ , alors  $|a_n| \rightarrow |L|$ .*

*Preuve:* L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$|a_n| = |(a_n - L) + L| \leq |a_n - L| + |L|,$$

ainsi que

$$|L| = |(L - a_n) + a_n| \leq |a_n - L| + |a_n|,$$

En combinant ces inégalités, on obtient

$$-|a_n - L| \leq |a_n| - |L| \leq |a_n - L|,$$

qui est équivalente à

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|.$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $a_n \rightarrow L$ , il existe  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Par l'inégalité ci-dessus, ceci implique aussi que  $||a_n| - |L|| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .  $\square$

**Remarque 3.23.** Remarquons que la suite des valeurs absolues  $|a_n|$  peut avoir une limite, même si  $a_n$  est divergente. C'est par exemple ce qui se passe avec la suite  $a_n = (-1)^n$ . Ceci implique que la réciproque du lemme précédent est fausse en général.  $\diamond$

Finalement, listons quelques propriétés qui sont utilisées constamment dans les calculs de limites.

**Lemme 14.** (Opérations sur les limites) Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites convergentes :  $a_n \rightarrow L_1$ ,  $b_n \rightarrow L_2$ . Alors

1) Limite de la somme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = L_1 + L_2.$$

2) Limite du produit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = L_1 L_2.$$

3) Limite du quotient : si  $L_2 \neq 0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}.$$

4) Si  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors  $L_1 \leq L_2$ .

**Remarque 3.24.** Dans la dernière propriété, les “ $\leq$ ” ne peuvent pas être remplacés par des “ $<$ ”. En effet, on peut très bien avoir deux suites convergentes telles que  $a_n < b_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, mais telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Comme exemple simple, on peut considérer les suites  $a_n = -\frac{1}{n}$  et  $b_n = \frac{1}{n}$ .  $\diamond$

*Preuve:* 1. Par l’inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| &= |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \\ &\leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2|. \end{aligned}$$

Fixons un  $\varepsilon > 0$ , et posons  $\varepsilon' := \varepsilon/2$ . Comme  $a_n \rightarrow L_1$ , il existe  $N_a$  tel que  $|a_n - L_1| \leq \varepsilon'$  pour tout  $n \geq N_a$ . Comme  $b_n \rightarrow L_2$ , il existe  $N_b$  tel que  $|b_n - L_2| \leq \varepsilon'$  pour tout  $n \geq N_b$ . On a donc, pour tout  $n \geq N := \max\{N_a, N_b\}$ ,

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon.$$

2. Comme  $a_n$  converge, elle est bornée : il existe  $C > 0$  telle que  $|a_n| \leq C$  pour tout  $n$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \\ &\leq |a_n| |b_n - L_2| + |L_2| |a_n - L_1| \\ &\leq C |b_n - L_2| + |L_2| |a_n - L_1|. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N_a$  tel que  $|a_n - L_1| \leq \frac{\varepsilon}{2|L_2|}$  pour tout  $n \geq N_a$  (serait dommage que  $L_2 = 0$ !), et soit  $N_b$  tel que  $|b_n - L_2| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$  pour tout  $n \geq N_b$ . On a alors que pour tout  $n \geq N := \max\{N_a, N_b\}$ ,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &\leq C |b_n - L_2| + |L_2| |a_n - L_1| \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{2C} + |L_2| \frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Il suffit de montrer la propriété dans le cas où  $a_n = 1$  pour tout  $n$ , c’est-à-dire de montrer que  $b_n \rightarrow L_2 \neq 0$  implique que

$$\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{L_2}.$$

(En effet, on utilise alors la propriété du produit démontrée plus haut, pour conclure dans le cas général que  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow L_1 \cdot \frac{1}{L_2}$ .) Pour ce faire, commençons par utiliser le fait que  $b_n \rightarrow L_2$  implique  $|b_n| \rightarrow |L_2| > 0$  : donc il existe  $N_0$  tel que  $|b_n| \geq |L_2|/2 > 0$  pour tout  $n \geq N_0$ . Ensuite, on peut écrire, pour tout  $n \geq N_0$ , que

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|b_n - L_2|}{|L_2| \cdot |b_n|} \leq \frac{2}{|L_2|^2} |b_n - L_2|.$$

Fixons maintenant  $\varepsilon > 0$ , et posons  $\varepsilon' = \frac{|L_2|^2 \varepsilon}{2}$ . Comme  $b_n \rightarrow L_2$ , on sait qu'il existe  $N'$  tel que  $|b_n - L_2| \leq \varepsilon'$  pour tout  $n \geq N'$ . Si on pose  $N = \max\{N_0, N'\}$ , on a aussi, pour tout  $n \geq N$ ,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2} \right| \leq \frac{2}{|L_2|^2} |b_n - L_2| \leq \frac{2}{|L_2|^2} \varepsilon' = \varepsilon.$$

On a donc montré que  $1/b_n \rightarrow 1/L_2$ .

4. La preuve de la dernière propriété est laissée en exercice. □

**Exemple 3.25.** Considérons la suite  $(x_n)$  définie ainsi :

$$x_n = \frac{6n + 4}{8n^3 + 4n^2}$$

La convergence de cette suite peut paraître a priori difficile à étudier, mais remarquons qu'on peut l'écrire comme un produit :

$$x_n = \frac{1}{2} \frac{3n + 2}{2n + 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} a_n b_n,$$

où  $a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$ ,  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . On a montré précédemment que  $a_n \rightarrow \frac{3}{2}$ , et on montre facilement que  $b_n \rightarrow 0$ ; en effet, si  $\varepsilon > 0$ , alors  $|b_n| \leq \varepsilon$  dès que  $n \geq N$ , où  $N$  est un entier quelconque plus grand que  $1/\sqrt{\varepsilon}$ . On peut maintenant utiliser la propriété ci-dessus pour des limites de produits, et conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a_n b_n = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 0 = 0.$$

On a donc montré que  $x_n$  converge et que sa limite est égale à zéro. Il est important d'apprécier le fait que si on avait voulu le montrer uniquement à partir de la définition de limite, il faudrait montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $N$  tel que

$$\left| \frac{6n + 4}{8n^3 + 4n^2} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Partir à la recherche de ce  $N$  est possible, mais représente une tâche considérablement plus compliquée que la simple utilisation de la propriété pour la limite d'un produit. ◇

## 3.4 Le Théorème des deux gendarmes

(ici, Video: [v\\_suites\\_gendarmes.mp4](#))

**Théorème 3.26.** Soit  $(x_n)$  une suite. Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  deux suites telles que

- 1)  $a_n \leq x_n \leq b_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

Alors  $(x_n)$  converge, et sa limite vaut  $L$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

*Preuve:* Soit  $N_0$  un entier tel que  $a_n \leq x_n \leq b_n$  pour tout  $n \geq N_0$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ .

- ★ Puisque  $a_n \rightarrow L$ , il existe  $N_a$  tel que  $a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  pour tout  $n \geq N_a$ .
- ★ Puisque  $b_n \rightarrow L$ , il existe  $N_b$  tel que  $b_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  pour tout  $n \geq N_b$ .

### 3.4. Le Théorème des deux gendarmes

Définissons l'entier

$$N := \max\{N_0, N_a, N_b\}.$$

Si  $n \geq N$ , alors on a en particulier que  $a_n \geq L - \varepsilon$  et  $b_n \leq L + \varepsilon$ , ce qui implique

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq x_n \leq b_n \leq L + \varepsilon.$$

De ces dernières inégalités, on tire que  $|x_n - L| \leq \varepsilon$ .

On a donc bien montré que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que  $|x_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Ceci signifie que  $x_n \rightarrow L$ .  $\square$

**Exemple 3.27.** Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ , définie par

$$x_n = \frac{2 + \cos(19n^2 + n^7)}{n}.$$

La partie contenant  $\cos(\dots)$  étant compliquée, on peut utiliser le fait qu'elle est bornée :  $-1 \leq \cos(\dots) \leq +1$ , ce qui permet d'écrire

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n} = \frac{2-1}{n} \leq x_n \leq \frac{2+1}{n} = \underbrace{\frac{3}{n}}_{=b_n}$$

Mais, puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , le théorème des deux gendarmes garantit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .  $\diamond$

**Informel 3.28.** Une bonne utilisation du théorème, pour montrer qu'une suite  $(x_n)$  converge et trouver sa limite, nécessite de trouver deux "gendarmes"  $(a_n)$  et  $(b_n)$  qui non seulement encadrent  $(x_n)$ , mais qui possèdent en plus la même limite! Dans des situations simples, comme dans l'exemple précédent, on obtient souvent des gendarmes efficaces en majorant/minorant certaines parties de  $x_n$  qui ne sont pas essentielles dans le comportement pour des indices  $n$  grands. Mais parfois, trouver des gendarmes qui ont la même limite peut s'avérer plus difficile!

**Exemple 3.29.** Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ , définie par

$$x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Comme le numérateur est un produit de  $n$  fois le même nombre "2", alors que le dénominateur est un produit de  $n$  nombres dont presque tous sont *plus grands que 2*, le dénominateur doit croître beaucoup plus vite que le numérateur. Ceci suggère que  $x_n \rightarrow 0$ , ce que l'on va essayer de montrer à l'aide du théorème des deux gendarmes.

Comme  $x_n \geq 0$ , il suffit de trouver une suite  $b_n$  telle que

- ★  $0 \leq x_n \leq b_n$ , et
- ★  $b_n \rightarrow 0$ .

Or si on écrit explicitement, pour tout  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdots 1} \\ &= \frac{2}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-2}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{2}{3}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} \cdot \frac{2}{1} \\ &\leq \frac{4}{n} =: b_n. \end{aligned}$$

Puisque  $b_n \rightarrow 0$ , ceci implique bien que  $x_n \rightarrow 0$ .  $\diamond$

Voyons ensuite une conséquence très utile du théorème des deux gendarmes :

**Corollaire 8.** Si  $(x_n)$  est bornée et si  $y_n \rightarrow 0$ , alors  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

*Preuve:* Comme  $(x_n)$  est bornée, il existe  $C > 0$  telle que  $-C \leq x_n \leq C$  pour tout  $n$ . On a donc  $0 \leq |x_n y_n| = |x_n| |y_n| \leq C |y_n|$ , ce qui donne

$$-C|y_n| \leq x_n y_n \leq C|y_n|.$$

Puisque  $y_n \rightarrow 0$ , ceci implique  $\pm C|y_n| \rightarrow 0$ . Par le Théorème des deux gendarmes, on conclut que  $|x_n y_n| \rightarrow 0$ , ce qui implique  $x_n y_n \rightarrow 0$ .  $\square$

## 3.5 Les suites monotones et bornées

(ici, Video: [v\\_suites\\_monotones\\_bornees\\_convergent.mp4](#))

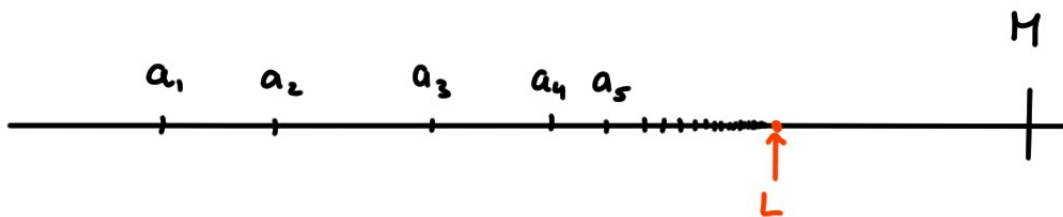
On a vu qu'une suite convergente est forcément bornée. Mais le contraire n'est pas vrai : une suite bornée ne converge pas forcément.

**Exemple 3.30.** La suite  $a_n = (-1)^n$  ne converge pas, mais elle est bornée, puisque  $|a_n| = 1$ , ce qui implique  $-1 \leq a_n \leq 1$  pour tout  $n$ .  $\diamond$

Par contre, si une suite est bornée *et monotone*, alors elle converge :

**Théorème 3.31.** Soit  $(a_n)$  une suite.

- 1) Si  $(a_n)$  est croissante et majorée, elle converge.
- 2) Si  $(a_n)$  est décroissante et minorée, elle converge.



*Preuve:* Soit  $(a_n)$  une suite croissante et majorée. Considérons l'ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  défini comme étant l'ensemble de tous les points de la suite :

$$A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Puisque la suite est bornée,  $A$  est majoré ; on peut donc considérer le réel  $L$  défini par

$$L := \sup A.$$

Nous allons montrer que  $a_n \rightarrow L$ .

Par définition, le supremum est un majorant, et donc  $a_n \leq L$  pour tout  $n$ . De plus, comme le supremum est le *plus petit* majorant, on a que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_*$  tel que  $L - \varepsilon \leq a_{n_*}$ . Or comme la suite est croissante, on a

$$L - \varepsilon \leq a_{n_*} \leq a_{n_*+1} \leq a_{n_*+2} \leq \dots \leq L,$$

ce qui implique  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_*$ .

On a ainsi montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Ceci montre que  $a_n \rightarrow L$ .

(Dans le deuxième cas, lorsque la suite est décroissante et minorée, on adapte cet argument après avoir défini  $L := \inf A$ .)  $\square$

Si le résultat peut paraître intuitif, la preuve a montré qu'il repose entièrement sur l'existence d'un supremum pour les ensembles majorés de  $\mathbb{R}$ .

Le théorème ci-dessus garantit que si une suite est monotone et bornée, alors elle possède une limite  $L$ , qui est soit un supremum (si la suite est croissante et majorée), soit un infimum (si la suite est décroissante et minorée). Parfois, on peut calculer cette limite  $L$  explicitement :

**Exemple 3.32.** Considérons la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Nous avons montré précédemment que cette suite est strictement croissante. Or elle est aussi majorée, puisque  $n < n+1$  implique

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Le théorème ci-dessus garantit donc qu'elle converge, et que sa limite est égale à

$$L = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

On peut vérifier (exercice!) que  $L = 1$ . ◇

L'exemple suivant présente un cas dans lequel le théorème permet de montrer qu'une certaine suite converge, mais sans pour autant donner la valeur de la limite.

**Exemple 3.33.** Soit  $(b_n)$  la suite définie ainsi :

$$\begin{aligned} b_1 &:= \frac{1}{1^2} \\ b_2 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \\ b_3 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \\ &\vdots \\ b_n &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ b_{n+1} &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cette suite est croissante puisque  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)^2} > b_n$ . Pour montrer qu'elle est bornée, remarquons que pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En utilisant cette inégalité pour  $k = 2, 3, \dots, n$ , on obtient une borne supérieure dans laquelle beaucoup de termes se **télescopent** :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{1}{1^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{=0} + \left(\frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n-1}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}_{=0} \end{aligned}$$

On a donc que

$$b_n < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

On a ainsi montré que  $(b_n)$  est majorée par  $M = 2$ , et comme elle est aussi croissante, elle converge : il existe  $L \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Puisque  $1 \leq b_n < 2$ , on a aussi que  $1 \leq L \leq 2$ . ◇

**Informel 3.34.** Euler a montré en 1734 que cette limite vaut

$$L = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934 \dots$$

## 3.6 Suites qui tendent vers l'infini

(ici, Video: [v\\_suites\\_tendent\\_vers\\_infini\\_2.mp4](#))

Dans les sections précédentes, on a surtout considéré les suites *convergentes*, c'est-à-dire celles qui tendent vers une limite finie lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

On n'étudiera pas systématiquement les suites *divergentes*, dont les comportements peuvent être aussi compliqués que variés, mais nous introduirons quand-même quelques outils qui permettront de décrire certains de ces comportements divergents.

Par exemple, une classe importante de suites divergentes est celle des suites qui *tendent vers l'infini*.

**Définition 3.35.** Soit  $(a_n)$  une suite réelle.

- 1) On dit que  $(a_n)$  **tend vers**  $+\infty$  (**lorsque**  $n \rightarrow \infty$ ) si pour tout  $M > 0$  il existe un entier positif  $N_0$  (qui dépend en général de  $M$ ) tel que

$$a_n \geq M \quad \forall n \geq N_0.$$

On notera, formellement,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , ou simplement  $a_n \rightarrow +\infty$ .

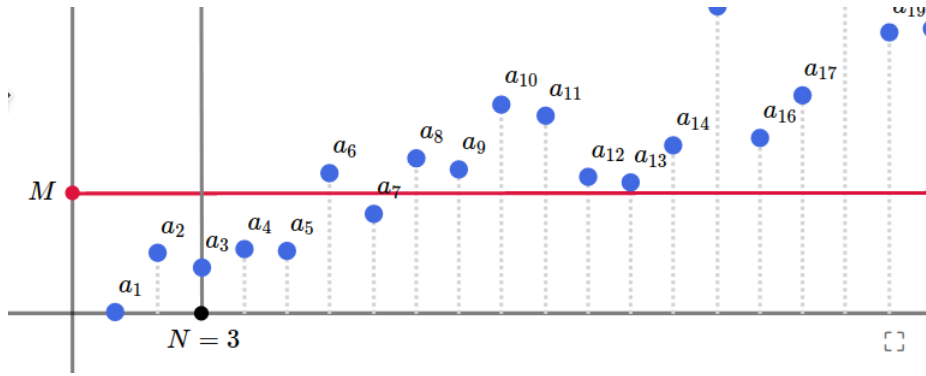
- 2) On dit que  $(a_n)$  **tend vers**  $-\infty$  (**lorsque**  $n \rightarrow \infty$ ) si pour tout  $M < 0$  il existe un entier positif  $N_0$  (qui dépend en général de  $M$ ) tel que

$$a_n \leq M \quad \forall n \geq N_0.$$

On notera (formellement)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , ou simplement  $a_n \rightarrow -\infty$ .

Donc  $a_n$  tend vers  $+\infty$  si elle dépasse et *reste* au-dessus de n'importe quel **seuil**  $M > 0$  (sous-entendu : arbitrairement grand) lorsque son indice  $n$  est pris suffisamment grand.

Sur l'animation suivante, fixer une valeur du seuil  $M > 0$ , puis chercher un  $N$  tel que  $a_n \geq M$  pour tout  $n \geq N$  :



**Exemple 3.36.** Montrons que la suite  $(a_n)$  définie par

$$a_n = \frac{2n - 5}{7}$$

tend vers  $+\infty$ . Pour cela, fixons un seuil arbitraire  $M > 0$ , et remarquons que

$$a_n \geq M \Leftrightarrow \frac{2n - 5}{7} \geq M \Leftrightarrow n \geq \frac{7M + 5}{2}.$$

Soit donc  $N := \lfloor \frac{7M+5}{2} \rfloor + 1$ . Si  $n \geq N$ , alors  $n \geq \frac{7M+5}{2}$  et donc  $a_n \geq M$ . Comme on peut trouver un tel  $N$  pour tout seuil  $M > 0$ , ceci montre bien que  $a_n \rightarrow \infty$ .  $\diamond$

**Exemple 3.37.** Considérons ensuite

$$a_n = \frac{n^2}{n + 1},$$

et montrons que  $a_n \rightarrow \infty$ . Pour un seuil  $M > 0$ , on a

$$a_n \geq M \Leftrightarrow n^2 - Mn - M \geq 0$$

Le polynôme  $P(x) = x^2 - Mx - M$  possède deux racines,

$$x_{\pm} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4M}}{2},$$

et il est positif partout en dehors de l'intervalle  $[x_-, x_+]$ . En définissant  $N := \lfloor x_+ \rfloor + 1$ , on a bien  $a_n \geq M$  dès que  $n \geq N$ .  $\diamond$

### 3.6.1 Propriétés des suites qui tendent vers l'infini

Tout comme les suites convergentes, celles qui tendent vers l'infini obéissent à certaines propriétés.

**Théorème 3.38.** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites. Si  $a_n \rightarrow +\infty$ ,

- 1) alors  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .
- 2) et si  $b_n \rightarrow +\infty$ , alors  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  et  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .
- 3) et si  $b_n$  est bornée, alors  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  et  $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ .
- 4) et s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $b_n \geq \delta$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ . (En particulier, si  $b_n \rightarrow L$ , avec  $L > 0$ , alors  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .)
- 5) et si  $b_n \geq a_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors  $b_n \rightarrow +\infty$ .

(ici, Video: [v\\_suites\\_tendent\\_vers\\_infini\\_preuves.mp4](#))



**Exemple 3.39.** Considérons la suite

$$x_n = n^3 - 7 \sin\left(\frac{n}{2}\right) \cos(\sqrt{n}),$$

que l'on peut écrire comme  $x_n = a_n + b_n$ , où

$$a_n = n^3, \quad b_n = -7 \sin\left(\frac{n}{2}\right) \cos(\sqrt{n}).$$

On voit que  $a_n \rightarrow \infty$ . On ne sait pas grand chose sur le signe de  $b_n$ , mais on sait qu'elle est bornée puisque

$$|b_n| = \left| -7 \sin\left(\frac{n}{2}\right) \cos(\sqrt{n}) \right| \leq 7,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

◇

**Exemple 3.40.** Considérons

$$x_n = \sqrt{n}(2 + \cos(n^5)),$$

que l'on peut écrire comme  $x_n = a_n b_n$ , où

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = 2 + \cos(n^5).$$

On a  $a_n \rightarrow \infty$ , mais  $b_n$  n'a visiblement pas de limite. Pourtant, on peut remarquer que  $\cos(n^5) \geq -1$ , et donc

$$b_n = 2 + \cos(n^5) \geq 2 - 1 = 1 =: \delta > 0.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty.$$

◇

## 3.7 Comportements polynômiaux, logarithmiques, exponentiels

(ici, Video: [v\\_suites\\_comportement\\_polynexplog.mp4](#))

### 3.7.1 Suites et fonctions élémentaires

Dans cette section, on compare différents types de comportements à l'infini, à savoir

- ★ les **exponentielles de base**  $r > 1$ ,

$$e_n = r^n$$

- ★ les **puissances positives**  $\alpha > 0$ ,

$$p_n = n^\alpha$$

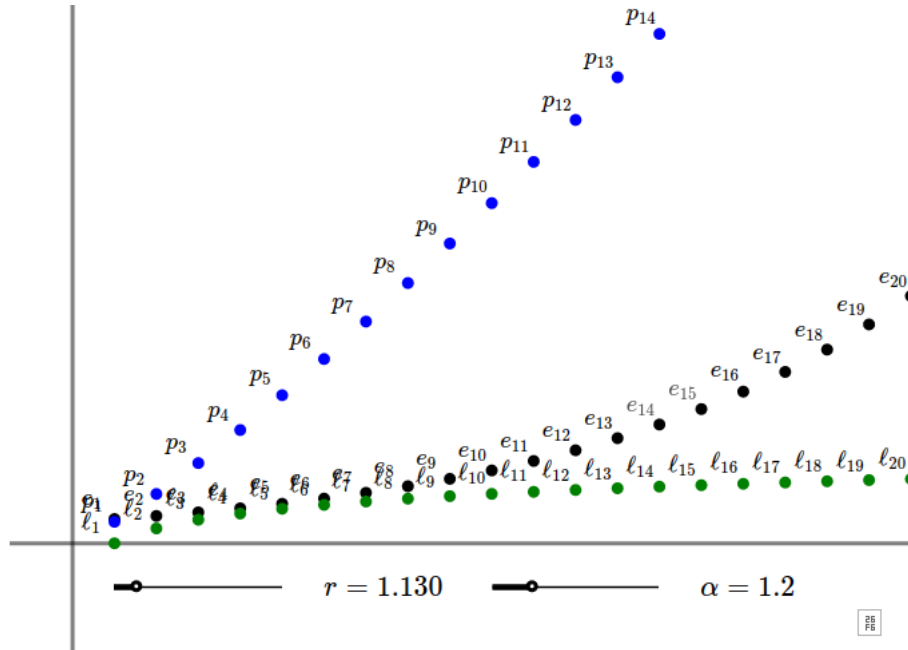
- ★ et les **logarithmes de base**  $b > 1$  :

$$\ell_n = \log_b(n).$$

Toutes ces suites tendent vers l'infini lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = +\infty.$$

Pourtant, elles ne tendent pas vers l'infini à l'infini : certaines *tendent vers l'infini plus vite que d'autres*.



Il est donc naturel d'établir rigoureusement une hiérarchie entre ces trois comportements :

**Théorème 3.41.** (Comparaison des divergences lorsque  $n \rightarrow \infty$ )

- 1) *Une exponentielle tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance : pour toute base  $r > 1$  et toute puissance  $\alpha > 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{r^n} = 0.$$

- 2) *Une puissance tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de logarithme : pour toute base  $b > 1$ , et tous  $\alpha, \beta > 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_b(n))^\beta}{n^\alpha} = 0.$$

*Preuve:* 1. Remarquons d'abord que si on sait traiter les cas où  $\alpha$  est entier, alors on sait aussi traiter le cas d'un  $\alpha$  quelconque. (En effet, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{n^\alpha}{r^n} \leq \frac{n^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}}{r^n}$ , donc si  $\frac{n^{\alpha'}}{r^n} \rightarrow 0$ , avec  $\alpha' = \lfloor \alpha \rfloor + 1 \geq \alpha$ , alors  $\frac{n^\alpha}{r^n} \rightarrow 0$  aussi.)

Pour simplifier, considérons le cas  $\alpha = r = 2$ . On aimerait donc montrer que

$$\frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0.$$

L'idée est d'utiliser la formule du binôme pour montrer que le dénominateur est plus grand qu'une puissance supérieure à  $n^2$ . En effet, la formule du binôme avec  $x = y = 1$  donne

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Or comme tous les termes de cette dernière somme sont positifs, la somme est plus grande que n'importe lequel de ces termes. Dans notre cas, il suffit de ne garder que le terme correspondant à  $k = 3$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ceci implique que

$$0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}.$$

On voit que dans ce dernier quotient, le numérateur se comporte en  $n^2$ , alors que le dénominateur se comporte en  $n^3$ , ce qui implique que sa limite est nulle. Plus précisément,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}}_{\rightarrow 6} = 0.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on conclut donc que  $\frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0$ .

Dans le cas général, pour une exponentielle de base  $r > 1$  et une puissance entière  $\alpha$  quelconque, on peut adapter la preuve ci-dessus. En effet, en écrivant  $r = 1 + \lambda$ , où  $\lambda > 0$ , et en utilisant à nouveau la formule du binôme, on peut minorer

$$r^n = (1 + \lambda)^n \geq \binom{n}{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}.$$

Le reste de la preuve s'adapte facilement (voir la vidéo ci-dessus), et mène à  $\frac{n^\alpha}{r^n} \rightarrow 0$ .

Une preuve semblable de cette première affirmation, même si ça ne se voit pas tout de suite, peut se trouver [ici](#) (lien web).

2. On peut démontrer la deuxième affirmation à l'aide de la première. □

**Informel 3.42.** Le théorème implique par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{1000}}{n^{0.0001}} = 0.$$

Pourtant, la petitesse du quotient est difficile à observer (sur l'animation ci-dessus par exemple), dans le sens où il faut que  $n$  soit vraiment *très grand* pour que ce quotient commence à se rapprocher de zéro...

On reviendra sur les limites étudiées ci-dessus, lorsque nous étudierons la **Règle de Bernoulli-l'Hôpital** (lien vers la section [m\\_derivee\\_Bernoulli\\_lHopital](#)).

## 3.8 Indéterminations

On a pour l'instant considéré deux types de limites :

- ★ celles qui convergent vers une limite finie :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ,
- ★ celles qui tendent vers l'infini :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ .

Or les limites importantes de l'analyse, celles qui permettent de faire avancer le développement du calcul différentiel et intégral, sont toutes des limites qui impliquent une forme ou une autre d'*indétermination*.

Une limite représente une **indétermination** lorsqu'elle fait intervenir une combinaison de grandeurs qui est telle qu'on ne peut pas déterminer sa valeur directement à l'aide d'une des propriétés de base des limites vues précédemment. Plus précisément, une indétermination apparaît lorsque une suite est composée d'autres suites, présentant des comportements du type "tend vers zéro" ou "tend vers l'infini".

On décrit les principales indéterminations en considérant une suite  $x_n$  formée à partir de deux autres suites, que l'on notera  $a_n$  et  $b_n$ . On suppose les comportements de  $a_n$  et  $b_n$  connus lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Si...	et si ...	... alors la limite de...	... est une indétermination
$a_n \rightarrow +\infty$	$b_n \rightarrow +\infty$	$x_n = a_n - b_n$	" $\infty - \infty$ "
$a_n \rightarrow 0$	$b_n \rightarrow +\infty$	$x_n = a_n b_n$	" $0 \cdot \infty$ "
$a_n \rightarrow \infty$	$b_n \rightarrow \infty$	$x_n = \frac{a_n}{b_n}$	" $\frac{\infty}{\infty}$ "
$a_n \rightarrow 0$	$b_n \rightarrow 0$	$x_n = \frac{a_n}{b_n}$	" $\frac{0}{0}$ "
$a_n \rightarrow 1$	$b_n \rightarrow +\infty$	$x_n = a_n^{b_n}$	" $1^\infty$ "
$a_n \rightarrow +\infty$	$b_n \rightarrow 0$	$x_n = a_n^{b_n}$	" $\infty^0$ "
$a_n \rightarrow 0$	$b_n \rightarrow 0$	$x_n = a_n^{b_n}$	" $0^0$ "

Nous ne traiterons pas les indéterminations de façon générale puisque justement, leur présence indique qu'une étude au cas par cas est nécessaire. Nous allons donc discuter certaines de ces indéterminations, et présenter quelques techniques qui permettent de les résoudre, sur des exemples. Notons que ces techniques ne sont pas spécifiques au cas  $n \rightarrow \infty$  : toutes seront utiles plus tard, dans d'autres types de limites (comme  $x \rightarrow x_0$ ).

### 3.8.1 Indéterminations du type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

**Exemple 3.43.** Nous avons déjà rencontré (lien vers la section [m\\_suites\\_limites\\_infinies](#)) la suite

$$x_n = \frac{n^2}{n+1},$$

qui est du type " $\frac{\infty}{\infty}$ " puisque  $n^2 \rightarrow +\infty$  et  $n+1 \rightarrow +\infty$ . Nous avons également montré qu'elle tend vers  $+\infty$ , l'intuition derrière ce fait étant la présence de l'exposant "2" fait que le numérateur l'emporte dans la limite  $n \rightarrow \infty$ .

Une autre façon de traiter ce quotient est de l'écrire comme un produit :

$$\frac{n^2}{n+1} = \underbrace{n}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=b_n}$$

On a alors  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $b_n \rightarrow 1$ , ce qui implique (par une propriété énoncée et démontrée [ici](#) (lien vers la section [m\\_suites\\_limites\\_infinies](#))) que

$$\frac{n^2}{n+1} = a_n b_n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, en réécrivant notre suite, on a pu la mettre sous une forme qui permet de déduire son comportement à l'aide d'une propriétés de base des suites.  $\diamond$

**Informel 3.44.** Lorsqu'on est en présence d'un quotient  $\frac{a_n}{b_n}$  dans lequel  $a_n$  et  $b_n$  sont les deux *grands*, on essaiera d'extraire ce qui est à l'origine de cette grandeur, en mettant un *terme dominant* en évidence. On pourra alors faire des simplifications dans la fraction  $\frac{a_n}{b_n}$ , et éventuellement faire disparaître l'indétermination.

**Exemple 3.45.** Considérons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)},$$

qui est effectivement une indétermination de la forme " $\frac{\infty}{\infty}$ ", puisque

- ★  $a_n = 3n^3 - 17n + 1 \rightarrow +\infty$  (polynôme de degré 3, dont le coefficient principal est  $3 > 0$ ),
- ★  $b_n = 5n^3 + \sin(n) \rightarrow +\infty$  ( $5n^3 \rightarrow \infty$  et  $\sin(n)$  est bornée).

Ce que l'on peut faire ici est **extraire les termes dominants** dans  $a_n$  et  $b_n$ , qui sont les termes contenant la puissance  $n^3$  :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)} = \frac{n^3(3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 + \frac{\sin(n)}{n^3})} = \frac{3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{\sin(n)}{n^3}} = \frac{a'_n}{b'_n}$$

En simplifiant par  $n^3$  on a obtenu un nouveau quotient qui dans la limite  $n \rightarrow \infty$  n'est *plus* indéterminé. En effet,  $a'_n \rightarrow 3$  et  $b'_n \rightarrow 5$ , et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{b'_n} = \frac{3}{5}.$$

◇

**Exemple 3.46.** Les comparaisons des comportements **logarithmiques, polynomiaux et exponentiels** (lien vers la section [m\\_suites\\_hierarchie](#)), ont consisté à résoudre les indéterminations " $\frac{\infty}{\infty}$ " suivantes :

$$x_n = \frac{(\log_r(n))^\beta}{n^\alpha} \rightarrow 0, \quad x_n = \frac{n^\alpha}{r^n} \rightarrow 0.$$

Remarquons que ces limites ont requis une analyse plus fine, puisque numérateur et dénominateur sont de nature différente (on n'a pas pu simplement extraire de "terme dominant"). ◇

### 3.8.2 Indéterminations du type " $\infty - \infty$ "

(ici, Video: [v\\_suites\\_tendent\\_vers\\_infini\\_conjugué.mp4](#))

Souvent, une suite est définie par une différence de deux nombres qui deviennent de plus en plus grands à mesure que  $n$  augmente. Or la différence de deux nombres grands peut, a priori, avoir n'importe quel type de comportement.

**Exemple 3.47.** Considérons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 5n^2),$$

dans laquelle  $a_n = n^3 \rightarrow +\infty$  et  $b_n = 5n^2 \rightarrow \infty$ . Comme  $a_n$  tend vers l'infini plus vite que  $b_n$ , dû au fait qu'il contient un terme de degré  $3 > 2$ , on a avantage à mettre  $n^3$  en évidence et obtenir un produit,

$$a_n - b_n = n^3 - 5n^2 = \underbrace{n^3}_{a'_n} \underbrace{\left(1 - \frac{5}{n}\right)}_{b'_n}$$

Maintenant, on a toujours  $a'_n \rightarrow \infty$ , mais puisque  $b'_n = 1 - \frac{5}{n} \rightarrow 1 \neq 0$ , leur produit tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n = +\infty.$$

◇

L'identité élémentaire

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

est souvent utile lorsqu'on a affaire à une différence  $a - b$ , si on la formule comme suit :

$$a - b = \frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)} = \frac{1}{a + b}(a^2 - b^2)$$

Ici, on a multiplié et divisé par le **conjugué** de  $a - b$ . Ainsi, à la différence " $a - b$ " se substitue la différence " $a^2 - b^2$ ", qui est parfois plus facile à traiter.

Cette approche est particulièrement efficace lorsqu'on a des différences de racines :

**Exemple 3.48.** Considérons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \},$$

qui est bien du type " $\infty - \infty$ ". En multipliant et divisant par le conjugué,

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ce quotient n'est plus indéterminé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

◇

Parfois, on pourra (même si c'est assez rare) résoudre une indétermination " $\infty - \infty$ ", de la forme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ , en extrayant explicitement de  $a_n$  et de  $b_n$  la même partie divergente :

**Exemple 3.49.** Considérons le cas " $\infty - \infty$ " suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(e^{\sqrt{n}} + 2) - \log(e^{\sqrt{n}} + 1))$$

Ici, on peut remarquer qu'en écrivant

$$\begin{aligned} a_n &= \log(e^{\sqrt{n}} + 2) = \log(e^{\sqrt{n}}(1 + 2e^{-\sqrt{n}})) = \sqrt{n} + \log(1 + 2e^{-\sqrt{n}}), \\ b_n &= \log(e^{\sqrt{n}} + 1) = \log(e^{\sqrt{n}}(1 + e^{-\sqrt{n}})) = \sqrt{n} + \log(1 + e^{-\sqrt{n}}), \end{aligned}$$

ce qui montre que  $a_n$  et  $b_n$  contiennent tous deux un " $\sqrt{n}$ ", qui tend vers l'infini, et qui disparaît lorsqu'on fait la différence :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(1 + 2e^{-\sqrt{n}}) - \log(1 + e^{-\sqrt{n}})) \\ &= \log(1) - \log(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est donc un cas d'une indétermination " $\infty - \infty$ " dans laquelle on peut montrer que les infinis se "compensent exactement".

◇

### 3.8.3 Indéterminations du type $\frac{0}{0}$

Nous reviendrons aux indéterminations  $\frac{0}{0}$ , puisqu'elles sont au cœur du problème de la *dérivation*, un outil central de l'analyse.

Pour l'instant, donnons déjà une limite classique  $\frac{0}{0}$  :

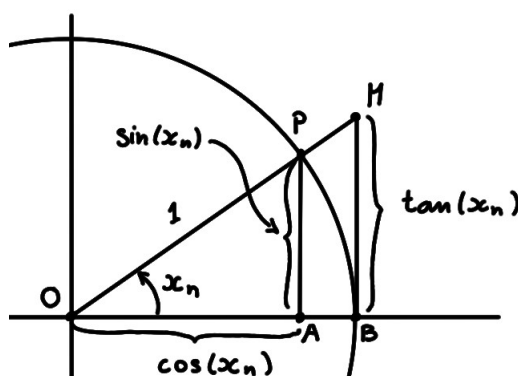
**Théorème 3.50.** Soit  $(x_n)$  une suite représentant des mesures d'angles en radians. Si  $x_n \neq 0$  pour tout  $n$ , et si  $x_n \rightarrow 0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1.$$

**Informel 3.51.** Attention, il est important de mentionner que le sinus, dans  $\sin(x_n)$ , est calculé en supposant que l'angle  $x_n$  est mesuré en **radians**. Sinon, la limite n'est pas la même !

*Preuve:* Comme la fonction  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  est paire, on peut supposer que  $x_n > 0$  pour tout  $n$ .

Puisque  $x_n \rightarrow 0$ , on a  $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Considérons donc un angle sur le cercle trigonométrique, dont la mesure en radians  $x_n$  est entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  :



Remarquons que le triangle  $OAP$  est inclus dans le secteur circulaire  $OBP$ , qui est lui-même inclus dans le triangle  $OBM$ . On a donc

$$\text{aire}(\triangle OAP) \leq \text{aire}(\text{secteur } OBP) \leq \text{aire}(\triangle OBM).$$

On explique [ici](#) (lien vers la section [m\\_elementaire\\_trigo](#)) comment calculer l'aire d'un secteur. Ainsi, en exprimant chacune de ces aires en fonction de  $x_n$ ,

$$\frac{1}{2} \cos(x_n) \sin(x_n) \leq \frac{1}{2} x_n 1^2 \leq \frac{1}{2} \tan(x_n).$$

Ces deux inégalités sont équivalentes à

$$\underbrace{\cos(x_n)}_{a_n} \leq \frac{\sin(x_n)}{x_n} \leq \frac{1}{\underbrace{\cos(x_n)}_{b_n}}.$$

Puisque  $x_n \rightarrow 0$ , on a  $a_n = \cos(x_n) \rightarrow 1$  et  $b_n \rightarrow \frac{1}{1} = 1$ . On conclut donc avec le théorème des deux gendarmes.  $\square$

### 3.8.4 Sur l'équivalence entre les indéterminations

Toutes les indéterminations du tableau présenté plus haut sont équivalentes, dans le sens où on peut toujours transformer une indétermination en une autre. Voyons les principaux cas.

- ★ Supposons par exemple que la limite de  $\frac{a_n}{b_n}$  soit " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Cela implique que  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ , et donc en écrivant  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , la limite devient du type " $\infty \cdot 0$ ".
- ★ Supposons ensuite que la limite de  $\frac{a_n}{b_n}$  soit " $\frac{\infty}{\infty}$ ". En écrivant

$$\frac{a_n}{b_n} = \exp\left(\log \frac{a_n}{b_n}\right) = \exp(\log(a_n) - \log(b_n)),$$

on voit que l'on fait apparaître  $\log(a_n) - \log(b_n)$ , qui dans la limite est du type " $\infty - \infty$ ".

- ★ Soit finalement  $a_n^{b_n}$  une suite qui dans la limite  $n \rightarrow \infty$  est du type " $1^\infty$ ". En écrivant  $a_n^{b_n} = \exp(b_n \log(a_n))$ , comme  $a_n \rightarrow 1$  implique  $\log(a_n) \rightarrow 0$ ,  $b_n \log(a_n)$  est du type " $\infty \cdot 0$ ".

## 3.9 Série géométrique et applications

(ici, Video: [v\\_suites\\_serie\\_geometrique.mp4](#))

**Théorème 3.52.** Soit  $r \in \mathbb{R}$ , et, pour tout  $n \geq 1$ , définissons la suite

$$s_n := 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n.$$

Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ ,

- ★  $s_n$  diverge et  $s_n \rightarrow +\infty$  si  $r \geq 1$ ,
- ★  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$  si  $|r| < 1$ ,
- ★  $s_n$  diverge si  $r \leq -1$ .

*Preuve:* Si  $r = 1$ , alors

$$s_n = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = n + 1,$$

ce qui implique  $s_n \rightarrow +\infty$ .

Si  $r \neq 1$ , on a vu (lien vers la section [m\\_elementaire\\_sommes\\_produits](#)) que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

On peut alors considérer séparément les cas :

- ★  $r > 1$ . Dans ce cas, on écrit plutôt

$$s_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

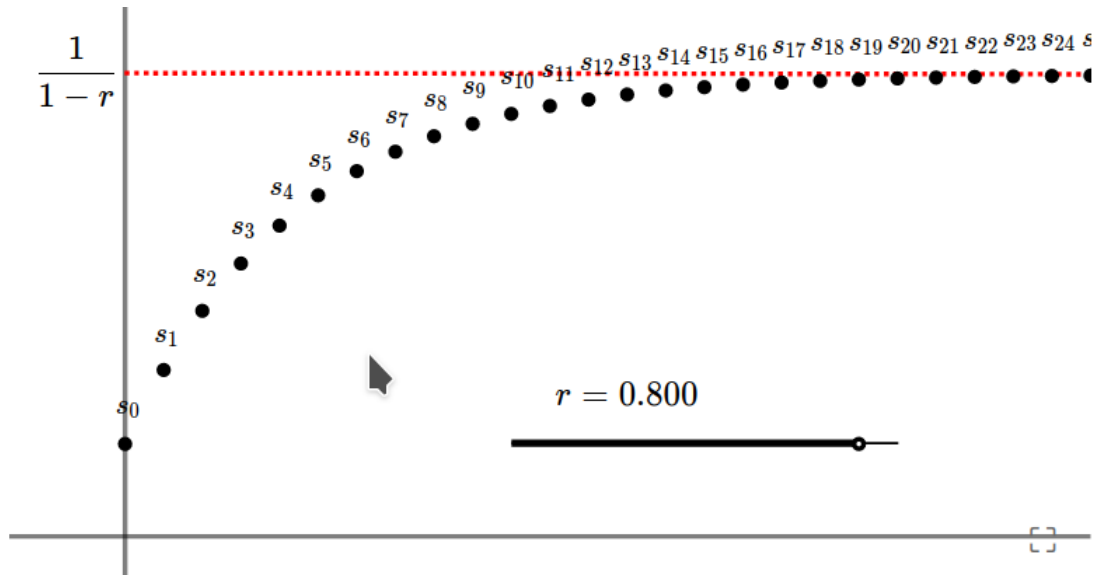
Comme  $r - 1 > 0$  et  $r^{n+1} \rightarrow \infty$ , on a  $s_n \rightarrow +\infty$ .

- ★  $-1 < r < 1$ . Dans ce cas,  $|r^n| = |r|^n \rightarrow 0$  car  $0 \leq |r| < 1$ , et donc  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$ .
- ★  $r = -1$ . Dans ce cas,  $s_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1})$ , et donc ne converge pas.
- ★  $r < -1$ . Dans ce cas,  $r^n = (-|r|)^n = (-1)^n |r|^n$ , et puisque  $|r|^n \rightarrow +\infty$ ,  $s_n$  n'a pas de limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

□

On peut observer le comportement de la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  en fonction de  $-1 < r < 1$  sur l'animation suivante. (On peut en particulier voir comme la suite n'est plus monotone pour des valeurs négatives de  $r$ )





Dans le cas  $|r| < 1$ , on écrit souvent le résultat sous la forme

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

La somme infinie, dans le côté gauche, s'appelle la **série géométrique**, et sa **somme** est la valeur du côté droit, à savoir  $\frac{1}{1-r}$ . (On étudiera les *séries* dans un chapitre ultérieur.)

On peut utiliser la série géométrique pour obtenir des formules utiles pour des sommes infinies de même nature :

**Exemple 3.53.** Fixons un  $|r| < 1$ , et considérons la somme

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \dots$$

Remarquons que cette dernière peut se récrire

$$1 + (-r) + (-r)^2 + (-r)^3 + (-r)^4 + (-r)^5 + \dots,$$

qui n'est autre que la série géométrique de raison  $-r$ . Comme  $|-r| = |r| < 1$ , cette dernière converge et sa somme vaut

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \dots = \frac{1}{1 - (-r)} = \frac{1}{1 + r}.$$

◇

**Exemple 3.54.** Fixons un  $|r| < 1$ , et considérons la somme

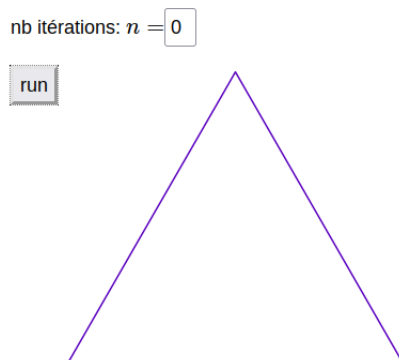
$$r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots$$

On peut récrire cette dernière ainsi :

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots &= (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots) - 1 \\ &= \frac{1}{1-r} - 1 \\ &= \frac{r}{1-r}. \end{aligned}$$

◇

**Exemple 3.55.** Partons, à l'étape zéro, d'un triangle équilatéral que l'on suppose d'aire égale à  $A_0 = 1$  :



Puis, à l'étape 1, on divise chacun de ses trois côtés en trois parties égales, et on remplace chaque partie du milieu par un triangle équilatéral. L'objet obtenu après cette première itération (mettre  $n = 1$  dans l'animation ci-dessus) a un bord constitué de 12 segments. Remarquons que l'aire de chacun des trois triangles équilatéraux rajoutés vaut  $\frac{1}{9}$ , et donc après une itération l'aire totale vaut

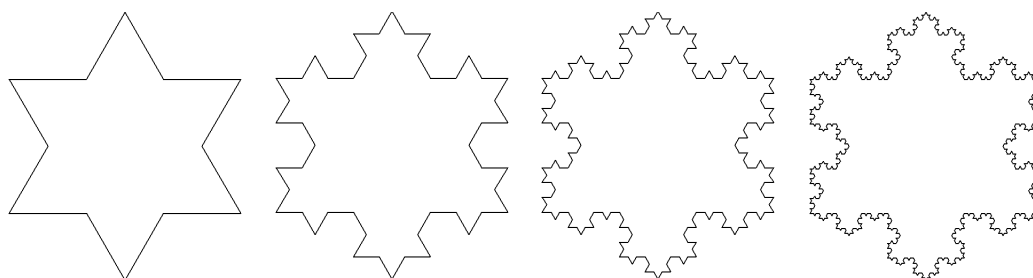
$$A_1 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9}.$$

Puis on recommence avec chacun des segments du bord de  $A_1$ , que l'on divise en trois parties égales, et dont on remplace la partie du milieu par un triangle équilatéral d'aire  $(\frac{1}{9})^2$ . On obtient ainsi un objet dont l'aire vaut maintenant

$$A_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2}.$$

(Voir aussi l'explication de la vidéo ci-dessus.)

En itérant ce processus à l'infini (diviser à chaque étape les segments du bord en trois parties égales, remplacer celui du milieu par un triangle équilatéral, etc), on obtient un objet limite appelé **flocon de von Koch** ([lien web](#)), qui est un objet **fractal** ([lien web](#)). (Attention : dans l'animation, ne pas tester des  $n$  trop grand, cela risque de faire du mal à votre browser!)



Quelle est l'aire totale du flocon, obtenu après avoir fait  $n \rightarrow \infty$ ?

Remarquons qu'à chaque étape, le nombre de segments du bord est multiplié par 4, et qu'à l'étape

$n$ , l'aire de chacun des petits triangles rajoutés vaut  $\frac{1}{9^n}$ . On a donc

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \\ A_2 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} \\ A_3 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^3} \\ &\vdots \\ A_n &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^3} + \dots + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{9^n}, \end{aligned}$$

que l'on peut récrire plus proprement :

$$A_n = 1 + \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right\}$$

On reconnaît ici une somme géométrique de raison  $r = \frac{4}{9} < 1$ , qui dans la limite  $n \rightarrow \infty$  devient une série géométrique convergente pour laquelle on peut utiliser notre formule :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8}{5}.$$

◇

### 3.9.1 Application : existence du nombre $e$

(ici, Video: [v\\_suites\\_nombre\\_e.mp4](#))

Dans cette section, on étudie la suite

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ ,  $e_n$  mène à une indétermination de la forme " $1^\infty$ ", et il n'est pas clair, a priori, de comment se comporte vraiment  $e_n$ .

**Informel 3.56.** Donnons deux arguments légitimes, *mais tous les deux faux*, concernant le comportement de  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  dans la limite  $n \rightarrow \infty$ .

★ On peut penser, que lorsque  $n$  est grand, le terme  $\frac{1}{n}$  devient négligeable, et donc écrire

$$e_n \simeq (1 + 0)^n = 1,$$

ce qui mène à penser que la limite de  $e_n$  est égale à 1.

★ En se rappelant que même s'il est petit, le terme  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  est toujours strictement positif, ce qui mène à penser, puisque  $1 + \varepsilon > 1$ , que

$$e_n \simeq (1 + \varepsilon)^n \rightarrow \infty.$$

On va pourtant montrer que le vrai comportement de cette suite ne suit aucun de ces scénarios. On peut déjà s'en convaincre en **testant** (lien vers la section [m\\_graphes\\_suite\\_reelle](#)) soi-même, avec  $x_n = \text{CODE} > \text{pow}(1 + 1/n, n) < \text{CODE} \dots$

**Théorème 3.57.**  $\triangle$  Soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  la suite définie ci-dessus. Alors

- 1)  $(e_n)$  est strictement croissante,
- 2)  $(e_n)$  est bornée :  $2 \leq e_n < 3$  pour tout  $n \geq 1$ .

Par conséquent, il existe  $e \in [2, 3]$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e.$$

*Preuve:* Pour commencer, utilisons la **formule du binôme de Newton** (lien vers la section [m\\_recurrence](#)) pour écrire  $e_n$  sous une forme qui permette de mieux étudier sa dépendance en  $n$  :

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

On utilise deux fois cette expression.

★ Affirmation :  $(e_n)$  est croissante. En utilisant l'expression précédente, pour  $n+1$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{< \frac{1}{n}} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}_{< \frac{k-1}{n}} \\ &> 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = e_n. \end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière égalité, on a utilisé le fait que si  $k = n+1$ , alors  $1 - \frac{k-1}{n} = 0$ . Comme  $e_n$  est strictement croissante, on a en particulier que  $e_n > e_1 = 2$ .

★ Affirmation :  $(e_n)$  est majorée par  $M = 3$ . En utilisant encore une fois l'expression ci-dessus,

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{< 1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{< 1} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour tout  $k \geq 2$ ,

$$k! = \underbrace{k}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\geq 2} \cdots \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot 2 \cdot 1 \geq 2^{k-1},$$

et donc

$$e_n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

On a donc montré que  $(e_n)$  est croissante et majorée, donc elle converge. Puisque  $2 \leq e_n < 3$  pour tout  $n$ , sa limite appartient aussi à cet intervalle.  $\square$

On connaît aujourd'hui des **milliards de chiffres** (lien web) de l'expansion décimale de  $e$ . Ses **premiers termes** (lien web) sont

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497 \dots$$

Euler a montré en 1737 que  $e$  est un nombre irrationnel.

## 3.10 Critère de d'Alembert pour les suites

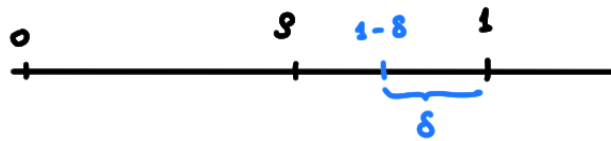
**Théorème 3.58.** (Critère de d'Alembert pour les suites)

Soit  $(a_n)$  une suite telle que la limite suivante existe :

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

- ★ Si  $0 \leq \rho < 1$ , alors  $(a_n)$  converge et  $a_n \rightarrow 0$ .
- ★ Si  $\rho > 1$ , alors  $(a_n)$  diverge, et si en plus  $a_n \geq 0$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors  $a_n \rightarrow +\infty$ .

*Preuve:* Supposons pour commencer que  $0 \leq \rho < 1$ . On peut donc choisir un  $\delta > 0$  tel que  $\rho < 1 - \delta$ ,



et trouver un entier  $N$  tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 - \delta \quad \forall n \geq N,$$

c'est-à-dire

$$|a_{n+1}| \leq (1 - \delta)|a_n| \quad \forall n \geq N.$$

En utilisant cette inégalité pour  $N$ ,

$$|a_{N+1}| \leq (1 - \delta)|a_N|,$$

en l'utilisant pour  $N + 1$ ,

$$|a_{N+2}| \leq (1 - \delta)|a_{N+1}| \leq (1 - \delta)^2|a_N|,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour  $N + k$ ,

$$|a_{N+k}| \leq (1 - \delta)|a_{N+(k-1)}| \leq \dots \leq (1 - \delta)^k|a_N|,$$

ce qui implique, puisque  $(1 - \delta)^k \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{N+k}| = 0.$$

Ceci implique  $a_n \rightarrow 0$ .

Supposons maintenant que  $\rho > 1$ , et fixons un  $\delta > 0$  tel que  $\rho > 1 + \delta$ . On a alors l'existence d'un entier  $N$  tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 + \delta \quad \forall n \geq N.$$

En utilisant cette inégalité pour  $N$ ,

$$|a_{N+1}| \geq (1 + \delta)|a_N|,$$

en l'utilisant pour  $N + 1$ ,

$$|a_{N+2}| \geq (1 + \delta)|a_{N+1}| \geq (1 + \delta)^2|a_N|,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour  $N + k$ ,

$$|a_{N+k}| \geq (1 + \delta)|a_{N+(k-1)}| \geq \dots \geq (1 + \delta)^k|a_N|,$$

ce qui implique, puisque  $(1 + \delta)^k \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{N+k}| = +\infty.$$

Ainsi,  $(a_n)$  n'a pas de limite, et si  $a_n \geq 0$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty.$$

□

**Informel 3.59.** Ce critère est utile, mais il s'applique seulement à des suites pour lesquelles  $|a_n|$  tend très vite vers zéro, ou très vite vers l'infini. (Voir exemples plus bas.)

**Exemple 3.60.** Considérons la suite

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

On a montré précédemment que cette suite tendait vers zéro, en montrant que le comportement exponentiel l'emporte sur le polynomial. Voyons comment le critère de d'Alembert permet d'obtenir le même résultat. Calculons

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} \right| \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Par le critère, ceci implique que  $a_n \rightarrow 0$ .

◇

Le critère est souvent utile dans l'étude du comportement de quotients présentant une indétermination du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ", et où on ne voit pas clairement comment extraire un terme dominant.

**Exemple 3.61.** Considérons

$$x_n = \frac{n!}{n^n},$$

également considérée précédemment. Écrivons le quotient

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Ainsi,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718\dots} < 1.$$

On conclut que  $x_n \rightarrow 0$ .

◇

Il est important de souligner que le critère de d'Alembert ne dit rien dans le cas où  $\rho = 1$ . Or beaucoup de suites très simples, dont le comportement est bien connu, sont des suites pour lesquelles  $\rho = 1$ . Voyons trois exemples.

**Exemple 3.62.** Pour la suite  $a_n = \frac{1}{n}$ , on a

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que  $a_n \rightarrow 0$ !)  $\diamond$

**Exemple 3.63.** Pour la suite  $a_n = n$ , on a aussi  $\rho = 1$ , donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que  $a_n \rightarrow \infty$ !)  $\diamond$

**Exemple 3.64.** Pour la suite  $a_n = (-1)^n$ , on a aussi  $\rho = 1$ , donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que  $a_n$  n'a pas de limite!)  $\diamond$

## 3.11 Limite supérieure, limite inférieure

On sait qu'une suite convergente est bornée, mais le contraire n'est pas vrai : une suite peut être bornée sans converger (par exemple :  $(-1)^n$ ).

On va voir ici que l'on peut malgré tout associer à toute suite bornée deux nombres, appelés *limite supérieure* et *limite inférieure*, qui donnent des informations utiles sur le comportement de la suite à l'infini. On verra aussi que ces deux nombres sont utiles pour étudier la convergence de la suite, puisqu'ils sont égaux si et seulement si la suite converge.

(ici, Video: [v\\_suites\\_limsup.mp4](#))

Soit  $(a_n)$  une suite bornée. On définit deux nouvelles suites,  $(M_n)$  et  $(m_n)$  en posant, pour tout  $n$ ,

$$\begin{aligned} M_n &:= \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \\ m_n &:= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}. \end{aligned}$$

Ces deux suites de réels sont bien définies puisque l'on suppose  $(a_n)$  bornée. De plus,

- ★ Comme  $M_n$  majore  $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ , on a en particulier que  $a_n \leq M_n$ .
- ★ Comme  $m_n$  minore  $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ , on a en particulier que  $a_n \geq m_n$ .

On peut donc écrire

$$m_n \leq a_n \leq M_n \quad \forall n. \quad (3.1)$$

**Lemme 15.** Les suites  $(M_n)$  et  $(m_n)$  sont monotones et bornées. Plus précisément,

- ★  $(M_n)$  est décroissante et minorée.
- ★  $(m_n)$  est croissante et majorée.

En particulier, ces deux suites sont convergentes.

*Preuve:* Définissons  $A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ . Puisque  $A_{n+1} \subset A_n$ , on a d'une part que  $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$ , ce qui donne

$$M_{n+1} \leq M_n,$$

et d'autre part que  $\inf A_{n+1} \geq \inf A_n$ , ce qui donne

$$m_{n+1} \geq m_n.$$

Comme  $(a_n)$  est bornée,  $(M_n)$  est minorée, et  $(m_n)$  est majorée. On a donc existence des limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ .  $\square$

On observe ces propriétés sur l'animation ci-dessous. La suite  $(a_n)$  est représentée par les points noirs,  $(M_n)$  par les points rouges, et  $(m_n)$  par les points bleus :





Aussi,

$$\begin{aligned} m_n &= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Remarquons que dans ce cas, on sait aussi que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . ◇

On a vu dans ce dernier exemple un cas d'une suite convergente pour laquelle les limites supérieures et inférieures avaient une valeur commune. C'est en fait un critère :

**Théorème 3.69.** Soit  $(a_n)$  une suite bornée. Alors  $(a_n)$  converge si et seulement si ses limites inférieures et supérieures sont égales. Plus précisément :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Bien-sûr ce résultat est aussi utile si on veut montrer qu'une suite bornée ne converge pas : il suffit de voir que ses limites supérieures et inférieures sont différentes.

*Preuve:* (Voir aussi la vidéo)

$\Rightarrow$ : Si  $a_n \rightarrow L$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Ceci implique que

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

et donc en particulier que pour tout  $n \geq N$ ,

$$M_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq L + \varepsilon,$$

et

$$m_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq L - \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L + \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

$\Leftarrow$ : Supposons que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . Si on fixe  $\varepsilon > 0$ , alors on a d'une part qu'il existe un  $N_+$  tel que

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N_+$$

et d'autre part qu'il existe un  $N_-$  tel que

$$\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq L - \varepsilon, \quad \forall n \geq N_-$$

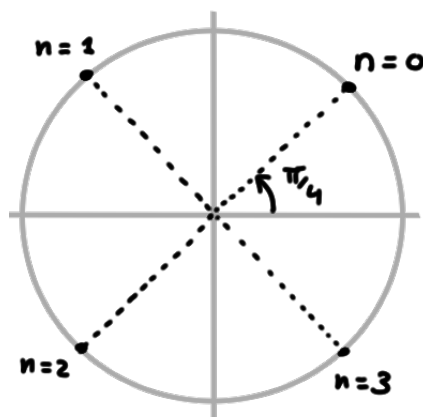
Ceci implique, en particulier, que

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

où on a posé  $N = \max\{N_-, N_+\}$ . Ceci montre que  $a_n \rightarrow L$ . □

**Exemple 3.70.** Considérons la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).$$



Ses premiers termes  $n = 0, 1, 2, 3$  sont

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Par la périodicité du sinus, le reste de la suite s'obtient en répétant cette séquence. On a en particulier que pour tout  $n$ ,

$$M_n = +\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par le théorème précédent, on en conclut que  $(a_n)$  est divergente.  $\diamond$

## 3.12 Le Théorème de Bolzano-Weierstrass

**Informel 3.71.** Supposons qu'à l'aide d'un stylo bleu, on place une infinité de points, un à un, dans un intervalle  $[a, b]$  :



Le *Théorème de Bolzano-Weierstrass* affirme que peu importe comment on choisit ces points, il existe forcément un point de l'intervalle proche duquel vont s'accumuler une infinité de points bleus.

(ici, Video: [v\\_suites\\_Bolzano\\_Weierstrass.mp4](#))

Pour énoncer le théorème rigoureusement, il nous faut un peu de terminologie :

**Définition 3.72.** Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite, et  $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  une suite d'entiers, strictement croissante. Si on pose

$$b_k := x_{n_k},$$

la suite  $(b_k)_{k \geq 0} = (x_{n_k})_{k \geq 0}$  est appelée **sous-suite** de  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

Une sous-suite s'obtient donc à partir de  $(x_n)_{n \geq 0}$  en ne gardant que certains termes, et en ignorant tous ceux dont l'indice est entre deux entiers consécutifs de la suite  $(n_k)_{k \geq 0}$  :



En choisissant les entiers  $n_k$  et en considérant  $(x_{n_k})_k$ , on dit qu'on a **extraît une sous-suite** de  $(x_n)_n$ .

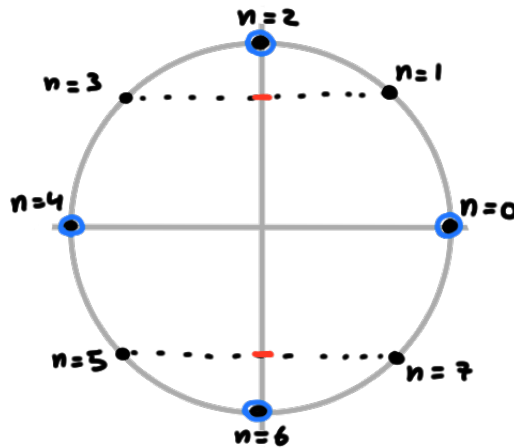
**Exemple 3.73.** Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

On comprend cette suite en plaçant l'angle  $n\frac{\pi}{4}$  sur le cercle trigonométrique et en regardant son sinus évoluer sur l'axe  $Oy$ . Ses premiers termes, en partant de  $n = 0$ , sont

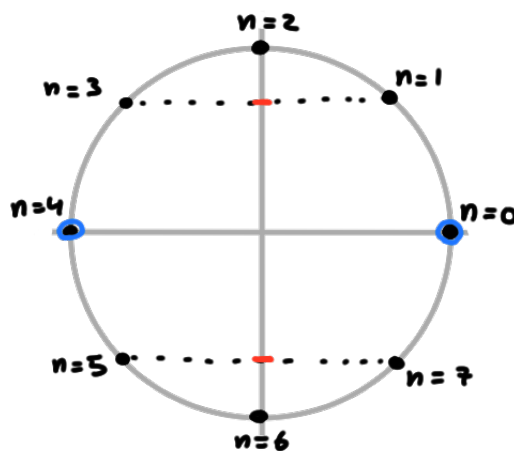
$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.$$

★ Si on considère les indices pairs, à savoir  $n_k = 2k$ ,



alors  $(x_{n_k})_{k \geq 0}$  est la suite  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

★ Si on considère les entiers multiples de 4,  $n_k = 4k$ ,



alors  $(x_{n_k})_{k \geq 0}$  est une suite constante puisque  $x_{n_k} = x_{4k} = \sin(k\pi) = 0$  pour tout  $k$ .

Ces deux exemples ont proposé des sous-suites le long desquelles on observait une certaine régularité, mais on peut considérer des sous-suites arbitraires, par exemple celle obtenue en prenant  $n_k = k^2 + \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ , pour lesquelles on n'observe en général aucune régularité particulière.  $\diamond$

**Théorème 3.74.** (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée  $(x_n)_n$  on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément : Si  $x_n \in [a, b]$  pour tout  $n$ , alors il existe  $L \in [a, b]$  et une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $x_{n_k} \rightarrow L$ .

Preuve: Soit  $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , c'est-à-dire

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n,$$

où  $M_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Considérons une suite  $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$  positive, tendant vers zéro. (Pour fixer les idées, on peut choisir  $\varepsilon_j := \frac{1}{j}$ .)

★  $j = 1$  : Par définition de la limite, il existe  $n'_1$  tel que

$$L - \frac{\varepsilon_1}{2} \leq M_{n'_1} \leq L + \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Par définition du supremum, il existe  $n_1 \geq n'_1$  tel que

$$L - \varepsilon_1 \leq x_{n_1} \leq L + \varepsilon_1.$$

★  $j = 2$  : Par définition de la limite, il existe  $n'_2 > n_1$  tel que

$$L - \frac{\varepsilon_2}{2} \leq M_{n'_2} \leq L + \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Par définition du supremum, il existe  $n_2 \geq n'_2$  tel que

$$L - \varepsilon_2 \leq x_{n_2} \leq L + \varepsilon_2.$$

★ etc.

Ainsi, on a construit une suite  $(n_k)$  strictement croissante telle que pour tout  $k$ ,

$$L - \varepsilon_k \leq x_{n_k} \leq L + \varepsilon_k.$$

Ceci signifie bien que  $x_{n_k} \rightarrow L$ . □

**Exemple 3.75.** Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$x_n = \cos(e^{3n} + e^{n^2} \sin(5n^3)).$$

Puisque  $x_n \in [-1, 1]$  pour tout  $n$ , le théorème garantit l'existence d'un réel  $L \in [-1, 1]$  et d'une sous suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $x_{n_k} \rightarrow L$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . ◇

Voyons un exemple simple dans lequel la sous-suite peut être donnée explicitement.

**Exemple 3.76.** Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

qui est bornée puisque  $|x_n| = \frac{n}{n+1} \leq 1$ . Cette suite ne converge pas, mais le théorème garantit l'existence d'une sous-suite convergente. Ici, on peut extraire explicitement deux sous-suites convergentes, assez naturellement :

★ Si on ne regarde que les indices *pairs*, c'est-à-dire que l'on considère  $n_k = 2k$ , alors on obtient la sous-suite

$$x_{2k} = \frac{2k}{2k+1},$$

qui converge vers 1 lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

★ Si on ne regarde que les indices *impairs*, c'est-à-dire que l'on considère  $n_k = 2k + 1$ , alors on obtient la sous-suite

$$x_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2},$$

qui converge vers  $-1$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Donc dans cet exemple, on peut extraire de la suite deux sous-suites différentes, qui ont des limites différentes :



◇

Pour finir, remarquons qu'en général, la conclusion du théorème n'est plus vraie si la suite n'est pas bornée :

**Exemple 3.77.** La suite  $x_n = n$  n'est pas bornée, et elle ne possède aucune sous-suite convergente.

◇

## 3.13 Suites de Cauchy

(ici, Video: [v\\_suites\\_Cauchy.mp4](#))

Remarquons que si une suite  $(a_n)$  converge, alors la distance entre deux de ses éléments consécutifs tend vers zéro :

$$|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En effet, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= |(a_{n+1} - L) - (a_n - L)| \\ &\leq \underbrace{|a_{n+1} - L|}_{\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Mais on peut en fait en dire un peu plus : la distance entre deux de ses éléments quelconques tend vers zéro à mesure que leurs indices grandissent.

$$|a_m - a_n| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m, n \rightarrow \infty.$$

En effet, on peut toujours écrire

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leq \underbrace{|a_m - L|}_{\rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Cette propriété porte un nom :

**Définition 3.78.**  $(a_n)$  est une **suite de Cauchy** si  $\forall \varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq N.$$

On a donc démontré, ci-dessus, que toute suite convergente est une suite de Cauchy, qui est la première moitié du théorème fondamental suivant :

**Théorème 3.79.** Dans  $\mathbb{R}$ , une suite  $(a_n)$  est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

*Preuve:* Soit  $(a_n)$  une suite convergente :  $a_n \rightarrow L$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , et considérons un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $n \geq N$ . Si on considère deux entiers  $m, n \geq N$ , on peut utiliser l'inégalité triangulaire et écrire

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leq |a_m - L| + |a_n - L| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Et donc  $(a_n)$  est une suite de Cauchy.

Pour montrer que toute suite de Cauchy est également convergente, voir la vidéo ci-dessus. □

**Exemple 3.80.** Considérons

$$a_n := 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite possède une limite, en montrant que c'est une suite de Cauchy. Pour ce faire, étudions la différence  $|a_n - a_m|$ . En prenant  $n > m \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= (\frac{1}{2})^{m-1} - (\frac{1}{2})^{n-1} \\ &\leq (\frac{1}{2})^{m-1}. \end{aligned}$$

On a utilisé  $k! \geq 2^{k-1}$  (pour tout  $k \geq 2$ ), fait le changement d'indice  $j = k - 1$ , et utilisé la formule pour une somme géométrique de raison  $r = \frac{1}{2}$ .

Donc si on fixe  $\varepsilon > 0$ , puisqu'il existe  $N$  tel que  $\frac{1}{2^{m-1}} \leq \varepsilon$  pour tout  $m \geq N$ , on peut conclure que si  $n \geq m \geq N$ , alors

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que  $(a_n)$  est une suite de Cauchy. Par le théorème, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe. ◇

Le fait que dans  $\mathbb{R}$ , toute suite de Cauchy et convergente est une des propriétés centrales des réels ; ici, c'est une conséquence (pas directe, certes) de l'Axiome qui garantit que dans  $\mathbb{R}$  tout ensemble non-vide majoré possède un supremum. Et en fait, on peut même montrer que la convergence des suites de Cauchy est *équivalente* à l'existence du supremum.

Il est important de souligner que cette équivalence n'a pas lieu dans les rationnels. En effet, on peut introduire la même notion de suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$ , et montrer que toute suite convergente  $a_n \in \mathbb{Q}$  est une suite de Cauchy. Par contre, il existe des suites de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$  *qui ne convergent pas* dans  $\mathbb{Q}$ . Par exemple, la suite

$$a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de rationnels (puisque  $a_n$  est une somme finie de rationnels), et on peut montrer comme ci-dessus que c'est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

Par contre, on peut montrer que la limite de  $a_n$  est  $e = 2.718\dots$ , qui est irrationnel (voir la preuve donnée plus loin **dans cette section** (lien vers la section [m\\_fonctions\\_EXPLOG](#)), **cette vidéo (Numberphile)** (lien web), ou encore **celle-ci (Michael Penn)** (lien web)). Donc  $(a_n)$  est une suite de Cauchy (de rationnels), qui converge dans  $\mathbb{R}$  mais pas dans  $\mathbb{Q}$ .

On dit que  $\mathbb{R}$  est un **corps complet** (car toute suite de Cauchy converge), alors que  $\mathbb{Q}$  est aussi un corps, mais qui n'est pas complet.