Chapitre 5

Séries numériques

5.1 Définitions et exemples

(ici, Video: v_series_intro_definition.mp4)

Une *série*, en analyse, est une somme infinie.

Dans ce chapitre, nous étudierons les **séries numériques**, qui ne sont rien d'autre que des sommes infinies dans lesquelles on somme tous les termes d'une suite donnée $(a_n)_{n\geqslant n_0}$, à partir du premier :

$$a_{n_0} + a_{n_1} + a_{n_2} + a_{n_3} + \dots$$

Le symbole utilisé pour représenter un telle somme est

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \,, \text{ ou } \sum_{n\geqslant n_0} a_n \,,$$

ou encore, puisque l'indice est *muet*,

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,, \text{ ou } \sum_{k\geqslant n_0} a_k \,,$$

que l'on lit "la somme de tous les a_k, pour k allant de n_0 à l'infini", et on dit que son **terme général** est a_k.

Il s'agit donc de définir rigoureusement ce que signifie "sommer une infinité de nombres". Pour simplifier un peu l'exposition, on supposera souvent que $n_0 = 0$ ou 1. Nous fixons donc une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, et commençons à sommer un à un ses éléments, en commençant par le premier. Ceci mène à définir les sommes successives obtenues :

Définition 5.1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On définit la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi :

$$\begin{aligned}
s_0 &:= a_0 \\
s_1 &:= a_0 + a_1 \\
s_2 &:= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &:= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On appelle $(s_n)_{n\geqslant 0}$ **la suite des sommes partielles associée à** $(a_n)_{n\geqslant 0}$. s_n est **la n-ème somme partielle**.

Quelle que soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, la suite des sommes partielles associée $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours bien définie. On donne alors un sens à la somme infinie des a_n en considérant la limite de la suite des sommes partielles :

Définition 5.2. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles associée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Si $(s_n)_{n\geqslant 0}$ converge, c'est-à-dire si la limite

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n$$

existe et est finie, on dit que la **série** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge**, et que **sa somme vaut** s. On écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,.$$

Dans les autres cas, on dit que la série **diverge**.

Lorsque $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, on écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty\,.$$

Exemple 5.3. (Suite constante) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_n = c$ pour tout $n \geqslant 0$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. La $n$ème somme partielle est

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\ &= \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= c(n+1)\,. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} c(n+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0\,, \\ 0 & \text{si } c = 0\,, \\ -\infty & \text{si } c < 0\,, \end{cases}$$

ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $c = 0$, et dans ce cas

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = 0\,.$$

Lorsque $c \neq 0$, la série diverge et

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0\,, \\ -\infty & \text{si } c < 0\,. \end{cases}$$

◇

Ce dernier exemple a montré, sans surprise, qu'une somme infinie de nombres strictement positifs, tous égaux, est infinie.

Exemple 5.4. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_n = n$. La somme partielle s_n est donc

$$s_n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n\,.$$

On **sait** (lien vers la section m_elementaire_sommes_produits) que cette somme vaut

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

ce qui implique que $s_n \to \infty$. Donc la série diverge :

$$1+2+3+4+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty\,,$$

◇

Même si cela peut sembler contre-intuitif, il est possible de sommer une infinité de nombres non-nuls, et d'obtenir une somme totale finie ; nous avions déjà rencontré ce phénomène dans l'étude de la série géométrique ; celle-ci fournit notre premier exemple non-trivial de série convergente :

Exemple 5.5. La série de terme général $a_n = r^n$, où $r \in \mathbb{R}$ est fixé, n'est autre que la **série géométrique** de raison r :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Si $r = 1$, la $n$ème somme partielle est $s_n = n + 1$, qui diverge bien-sûr. Si $r \neq 1$, on **peut** (lien vers la section m_elementaire_sommes_produits) calculer

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,,$$

et conclure :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |r| < 1, \\ \text{diverge} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, dans le cas où $|r| < 1$, $s_n \to \frac{1}{1-r}$, et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\,.$$

Par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}\,.$$

◇

Nous connaissons un autre cas de série convergente (de termes non-nuls), plus compliqué :

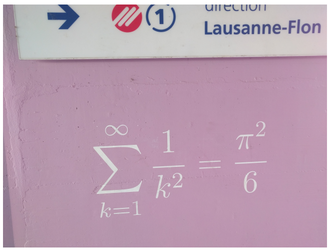
Exemple 5.6. Nous **avons vu** (lien vers la section m_suites_majorees_convergent) que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad \text{converge}\,.$$

En effet, nous avions montré que les sommes partielles

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

forment une suite croissante et majorée, donc convergente.



◇

5.1.1 Divergence de la série harmonique

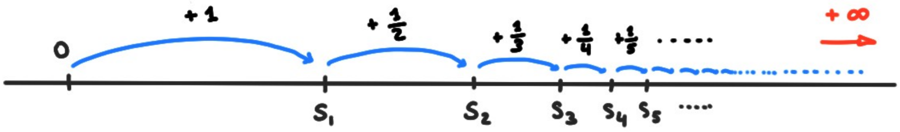
Au vu du premier exemple de la section précédente, on peut facilement construire des exemples de séries divergentes, comme par exemple

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

Considérons maintenant un exemple plus intéressant, et bien plus important, celui de la *série harmonique*.

Théorème 5.7. *La **série harmonique**, de terme général $a_n = \frac{1}{n}$, est divergente :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = +\infty .$$



En d'autres termes, si l'on fait un pas de longueur 1, puis un pas de longueur $\frac{1}{2}$, puis un pas de longueur $\frac{1}{3}$, et ainsi de suite (toujours vers la droite), alors on part à l'infini.
Preuve: Remarquons que la suite des sommes partielles associée à la suite $a_n = \frac{1}{n}$ est strictement croissante : $s_{n+1} > s_n$. Pour montrer que $s_n \to \infty$, il suffit donc de trouver une sous-suite $(s_{n_k})_k$ telle que $s_{n_k} \to \infty$.

Considérons les indices qui sont des puissances de 2 :

$$
\begin{aligned}
s_2 = s_{2^1} &= \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} \geqslant \tfrac{1}{2} \\
s_4 = s_{2^2} &= \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} \geqslant 2 \cdot \tfrac{1}{2} \\
s_8 = s_{2^3} &= \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}}_{\geqslant 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} \geqslant 3 \cdot \tfrac{1}{2} \\
s_{16} = s_{2^4} &= \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}}_{\geqslant 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\geqslant 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Plus généralement, on peut montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$s_{2^k} \geqslant \frac{k}{2} .$$

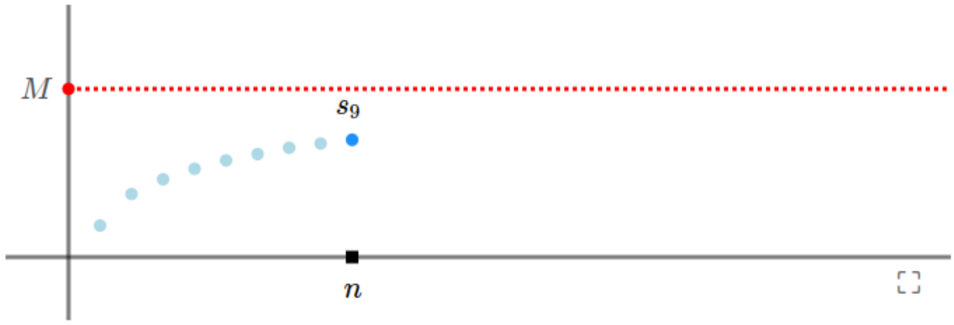
Comme $\frac{k}{2} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$, on conclut que $s_{2^k} \to \infty$.

Une autre preuve (très semblable) de la divergence de la série harmonique : **A stylish proof that... (Michael Penn)** (lien web) □

Nous venons de montrer que la suite partielle associée à la série harmonique,

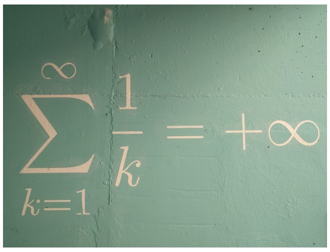
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tend vers l'infini : Cela signifie que quel que soit le seuil $M > 0$ que l'on fixe, aussi grand soit-il, il existe toujours un indice N tel que $s_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N$.



Informel 5.8. La suite des sommes partielles de la série harmonique tend vers l'infini, mais **très** lentement... Par exemple, si dans l'animation ci-dessus on fixait $M = 50$, il faudrait que n soit au moins $\cdot 10^{21}$ pour voir qu'effectivement $s_n \geqslant 50$...

On pourra également lire les commentaires se trouvant **ici** (lien web).



.

5.1.2 Sur l'importance de la définition de convergence pour une série

Exemple 5.9. Considérons $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 0$. Les sommes partielles sont alors

$$\begin{aligned}
s_0 &= (-1)^0 = 1 \\
s_1 &= (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \\
s_2 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1 - 1 + 1 = 1 \\
s_3 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est impair,} \\ 1 & \text{si n est pair.} \end{cases}$$

Donc s_n, ce qui signifie que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

est divergente. ◇

Informel 5.10. On serait peut-être tenté de calculer la somme infinie du dernier exemple,

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

à l'aide d'opérations algébriques injustifiées.

Par exemple, on pourrait réorganiser les termes de la série par paquets de deux :

$$s = \underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + \cdots = 0\,.$$

Mais une autre façon de réarranger donnerait

$$s = 1 + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \cdots = 1$$

Ou alors, en multipliant la somme par 2,

$$\begin{aligned} 2s = s + s &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \\ &\quad + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1\,, \end{aligned}$$

et donc $s = \frac{1}{2}$... (Voir aussi **ici** (lien web) pour une autre façon de formuler la même absurdité.)

Les manipulations formelles faites sur cet exemple (insérer des parenthèses, sommer terme à terme) sont interdites, parce qu'elles s'effectuent sur une série *divergente*. Ceci montre que l'on ne peut pas manipuler une série comme on manipule une somme contenant un nombre fini de termes, et souligne l'importance de la *définition* de convergence que nous avons adoptée pour une série (via les sommes partielles).

Dans la section suivante on montrera, entre autres, que pour les séries *convergentes*, les manipulations usuelles sur les sommes finies sont autorisées.

5.2 Propriétés des séries convergentes

(ici, Video: `v_series_proprietes.mp4`)

5.2.1 Le terme général tend vers zéro

Intuitivement, il est clair que pour pouvoir sommer une infinité de nombres a_n, il faut que ceux-ci deviennent toujours plus petits à mesure que n devient grand :

Lemme 16. *Si $\sum_n a_n$ converge, alors $a_n \to 0$.*

Preuve: Si la série converge, cela signifie que la suite des sommes partielles a une limite : $s_n \to s$. On a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)}_{=s_n} - \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}_{=s_{n-1}} \\ &= s_n - s_{n-1}\,, \end{aligned}$$

ceci implique que $a_n \to s - s = 0$. □

Comme corollaire du lemme ci-dessus, on a un résultat pratique : si le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, alors cette série diverge.

Exemple 5.11. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1+3^n}{2^n+3^n}$ diverge. En effet, son terme général ne tend pas vers zéro puisque

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3^n}{2^n+3^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(1+3^{-n})}{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+3^{-n}}{1+(\frac{2}{3})^n} = 1\,.\end{aligned}$$

◇

Informel 5.12. Attention : *il ne suffit pas que $a_n \to 0$ pour que $\sum_n a_n$ converge !* Par exemple, la série harmonique a son terme général qui tend vers zéro, $a_n = \frac{1}{n} \to 0$; mais elle diverge.

Donc pour qu'une série converge, son terme général doit faire plus que juste “tendre vers zéro” : il doit tendre vers zéro suffisamment vite.

5.2.2 Converger : un propriété asymptotique

La deuxième qualité importante peut être formulée en disant que *la convergence/divergence d'une série est un propriété qui ne dépend pas d'un nombre fini de ses termes*. En effet, si une série converge (resp. diverge), alors *on peut modifier un nombre arbitraire (mais fini) de termes, elle continuera à converger (resp. diverger)*.

Exemple 5.13. On sait que la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, et que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Fixons un entier N_0, arbitrairement grand.

⋆ Si on définit

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n < N_0\,,\\ \frac{1}{n} & \text{si } n \geqslant N_0\,,\end{cases}$$

alors $\sum_n a_n$ diverge.

⋆ Si on définit

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < N_0\,,\\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geqslant N_0\,,\end{cases}$$

alors $\sum_n b_n$ converge.

◇

5.2.3 Sommes et multiplication par un scalaire

Finalement, donnons deux propriétés simples utilisées constamment dans la manipulation des séries convergentes :

Proposition 7. *Soient* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *des séries convergentes.*

1) $\sum_n (a_n + b_n)$ *est convergente, et*

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$$

2) Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_n \lambda a_n$ *est convergente, et*

$$\sum_n \lambda a_n = \lambda \sum_n a_n$$

En particulier, pour toutes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_n a_n + \beta \sum_n b_n$$

Preuve: Pour des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, considérons les sommes partielles associées, notées respectivement $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s'_n)_{n\geqslant 0}$. On a donc, par hypothèse, existence des limites

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k\geqslant 0} a_k$$
$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \sum_{k\geqslant 0} b_k\,.$$

Soit $(s''_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles associées à la suite $(a_n + b_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout n,

$$s''_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = s_n + s'_n\,.$$

(On a fait une opération autorisée puisque les deux sommes sont finies !) Étant la somme de deux suites convergentes, s''_n est également convergente, et de plus sa somme est

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) &= \lim_{n\to\infty} s''_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (s_n + s'_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n \\ &= \sum_{k\geqslant 0} a_k + \sum_{k\geqslant 0} b_k\,.\end{aligned}$$

L'autre propriété se démontre de la même façon. □

Exemple 5.14. Dans $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{5(-2)^n}{7^n} \right)$, on reconnaît deux séries géométriques, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{7^n}$, toutes deux convergentes puisque de raisons $|r| < 1$. On peut donc utiliser la proposition, et en déduire que notre série de départ converge. De plus, sa somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{5(-2)^n}{7^n} \right) &= 3 \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} + 5 \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{-2}{7} \right)^n \\ &= 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 5 \cdot \frac{1}{1 - (\frac{-2}{7})} \\ &= \frac{89}{9}\end{aligned}$$

◇

5.3 Le critère de comparaison

(ici, Video: v_series_critere_comparaison.mp4)

Le critère le plus utilisé dans l'étude des séries. Il permet, lorsqu'il s'applique, d'étudier la convergence/divergence d'une série donnée, en la comparant avec une autre série donc la convergence/divergence est connue.

Théorème 5.15. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

pour tout n suffisamment grand.

1) *Si $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge aussi.*
2) *Si $\sum_n a_n = +\infty$, alors $\sum_n b_n = +\infty$.*

Preuve: Supposons pour commencer que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ **pour tout** $n \geqslant 1$ (au lieu de juste "pour tout n suffisamment grand"). Définissons les sommes partielles :

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \qquad s'_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

Par définition, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si s_n est convergente, et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge si et seulement si s'_n est convergente.
Puisque $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pour tout n, on a aussi que

$$0 \leqslant s_n \leqslant s'_n \qquad \forall n \geqslant 1 \,.$$

De plus, comme tous les termes que leurs sommes contiennent sont positifs, s_n et s'_n sont des suites croissantes. En effet, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} \geqslant 0 \,, \end{aligned}$$

et donc $s_{n+1} \geqslant s_n$. (Pareil avec s'_n.)

1) Si $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge, alors il existe $s' \in \mathbb{R}$ tel que $s'_n \to s'$. Comme s'_n est croissante, on a $s'_n \leqslant s'$, et donc aussi $s_n \leqslant s'$. Donc s_n est croissante et majorée, donc aussi convergente, ce qui signifie que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
2) Si $\sum_{n\geqslant 1} a_n = +\infty$, c'est que $s_n \to \infty$, et donc comme $s'_n \geqslant s_n$ pour tout $n \geqslant 1$, on a aussi que $s'_n \to \infty$, c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant 1} b_n = +\infty$.

Maintenant, si on a $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ seulement à partir d'un certain n_0, on peut adapter l'argument sans difficulté, en redéfinissant

$$s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \qquad s'_n := \sum_{k=n_0}^{n} b_k \,.$$

□

Exemple 5.16. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n + n + \sin(n)} \,.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $n + \sin(n) \geqslant 1 - 1 = 0$. On peut donc comparer :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n + n + \sin(n)}}_{=:a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{=:b_n} .$$

Puisque $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$, elle converge. Donc $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge aussi. ◇

Exemple 5.17. Considérons

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} ,$$

où p est un réel fixé.

- ⋆ On sait déjà que dans le cas $p = 2$,

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

  Or si on prend n'importe quel $p > 2$, alors $n^p \geqslant n^2$ (pour tout $n \geqslant 1$), et donc

  $$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{=a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=b_n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 .$$

  Donc par le critère de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ converge aussi.
- ⋆ D'autre part, on sait que la série harmonique

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = \infty .$$

  Or si on prend n'importe quel $p < 1$, alors $n^p \leqslant n$ (pour tout $n \geqslant 1$), et donc

  $$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{=b_n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 .$$

  Donc par le critère de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

On a donc montré que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{diverge si } p \leqslant 1 , \\ \text{converge si } p \geqslant 2 . \end{cases}$$

Nous verrons plus loin ce qu'il en est des valeurs intermédiaires $p \in]1, 2[$. ◇

5.4 Le critère de Leibniz

(ici, Video: v_series_critere_alternee.mp4)

Certaines séries très particulières ont un terme général tel que le signe d'un terme est opposé au signe du terme suivant ; on appelle ces séries **alternées**. Sous certaines conditions additionnelles, on peut garantir que ces séries convergent :

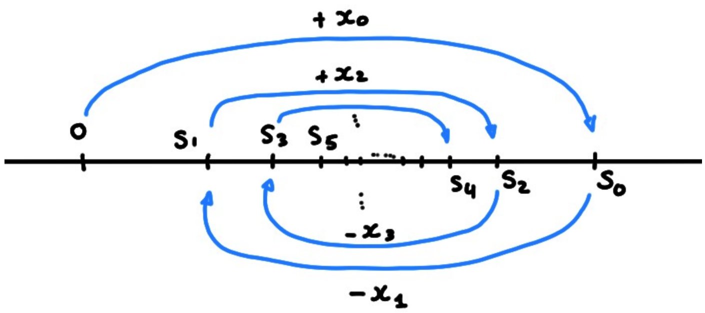
Théorème 5.18. *(Critère de Leibniz pour les séries alternées) Soit $a_n = (-1)^n x_n$, où*

1) $x_n \geqslant 0$,

2) x_n est décroissante, et

3) $x_n \to 0$.

Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots$ converge.



Preuve: Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive décroissante et soit s_n la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x_n$:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_0 \\ s_1 &= x_0 - x_1 \\ s_2 &= x_0 - x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Remarquons (voir l'image ci-dessus) que

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant s_5 \leqslant \cdots s_6 \leqslant s_4 \leqslant s_2 \leqslant s_0$$

Considérons donc les sous-suites s_{2k} et s_{2k+1}. Puisque (s_{2k}) est décroissante et minorée par s_1, la limite

$$s_{\text{pairs}} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} \quad \text{existe.}$$

Puisque (s_{2k+1}) est croissante et majorée par s_2, la limite

$$s_{\text{impairs}} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \quad \text{existe.}$$

Mais comme $|s_{2k+1} - s_{2k}| = |x_{2k+1}| \to 0$, on a $s_{\text{pairs}} = s_{\text{impairs}}$. □

Exemple 5.19. La **série harmonique alternée** est définie par

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Elle s'obtient simplement en changeant le signe de tous les indices pairs de la série harmonique. Comme on peut écrire cette série sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n x_n\,,$$

où $x_n = \frac{1}{n}$ est positif, décroissant, et tend vers zéro, on conclut par le théorème du dessus qu'elle converge. (On verra plus tard que sa somme vaut $\log(2)$). ◇

Exemple 5.20. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}$$

Puisque $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ dès que n est pair, cette série est en fait

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+2}$$

Mais maintenant, $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+2}$$

Puisque $x_k := \frac{1}{2k+2}$ est positif, décroissant, et tend vers zéro, cette série converge. ◇

5.5 Séries téléscopiques

Considérons une série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ dans laquelle le terme général a_n est une différence,

$$a_n = x_n - x_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1\,.$$

où $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite fixée. On appelle les séries de ce type des séries **téléscopiques**.

En effet, on remarque que la n-ème somme partielle associée à $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ peut se calculer exactement, puisque en réarrangeant les termes, beaucoup de paires se *téléscopent* :

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= -x_0 + \underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0} + \underbrace{(x_2 - x_2)}_{=0} + \cdots + \underbrace{(x_{n-1} - x_{n-1})}_{=0} + x_n \\ &= x_n - x_0\,. \end{aligned}$$

On conclut de là que si la suite x_n possède une limite, $x_n \to L$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. De plus, sa somme vaut

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = L - x_0\,.$$

Exemple 5.21. La série téléscopique

$$\sum_{n\geqslant 2} \big(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) - \cos(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}})\big)$$

converge puisque $d_n = \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) \to 1$, et sa somme vaut

$$\sum_{n\geqslant 2} \big(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) - \cos(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}})\big) = 1 - \cos(1)\,.$$

◇

Exemple 5.22. La série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge puisque

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Or si on regarde de plus près, on peut la voir comme une série téléscopique, puisque

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

(On verra plus tard comment faire ce genre de décomposition de façon plus systématique, appelée *décomposition en éléments simples*.) La n-ème somme partielle peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\,, \end{aligned}$$

où on a pu "téléscoper" les termes 2 à 2. On a donc que

$$s = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1\,.$$

◇

5.6 Séries $\sum_n \frac{1}{n^p}$

(ici, Video: v_series_np.mp4)

Dans cette section, on regarde de plus près les séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}\,,$$

où p est un réel fixé. On a déjà traité les cas $p = 1$ (série harmonique, divergente) et $p = 2$ (convergente), et on en a déduit, par comparaison, les cas $p < 1$ et $p > 2$. Ici on complète cette analyse, en particulier en traitant les valeurs intermédiaires $1 < p < 2$.

Théorème 5.23. *Soit $p \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{converge} & \textit{si } p > 1\,, \\ = +\infty & \textit{si } p \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Ce résultat montre à quel point la convergence/divergence d'une série peut être *sensible* au comportement de ses coefficients :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.000001}} < \infty\,,$$

alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999999}} = \infty\,.$$

Preuve: Puisque les autres cas ont déjà été traités, considérons $p \in]1,2[$ (même si l'argument ci-dessous fonctionne pour tout $p > 1$). Comme $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ est monotone croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée pour en déduire qu'elle converge. Et pour montrer qu'elle est majorée, il suffit de montrer qu'une sous-suite quelconque est majorée (exercice). Pour ce faire, on considère la sous-suite s_{2^k-1}. L'idée va être de majorer cette suite, en la comparant à la somme partielle d'une série géométrique convergente.

Pour $k = 1$, on a

$$s_{2^1-1} = \tfrac{1}{1^p} = 1\,.$$

Pour $k = 2$, on peut majorer

$$\begin{aligned} s_{2^2-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right). \end{aligned}$$

Pour $k = 3$,

$$\begin{aligned} s_{2^3-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{4^p} + \cdots + \tfrac{1}{7^p}}_{\leqslant 4\frac{1}{4^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour $k = 4$,

$$\begin{aligned} s_{2^4-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{4^p} + \cdots + \tfrac{1}{7^p}}_{\leqslant 4\frac{1}{4^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{8^p} + \cdots + \tfrac{1}{15^p}}_{\leqslant 8\frac{1}{8^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 \end{aligned}$$

Comme $p > 1$, on a $\frac{2}{2^p} < 1$, et donc pour tout k,

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^{k-1} \\ &< 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^{k-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{le reste de la série}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{2^p}} < \infty\,. \end{aligned}$$

□

Dans certaines séries, on pourra parfois identifier dans le terme général a_n une contribution dominante de la forme $\frac{1}{n^p}$, ce qui pourra donner des idées quant à la convergence/divergence de la série.

Exemple 5.24. Considérons la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{4n^3 + 7}}\,.$$

Gardons la contribution venant uniquement du "n^3". Comme $7 \geqslant 0$, on peut majorer le terme général comme suit :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4n^3 + 7}}}_{=a_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4n^3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} =: b_n$$

Par le théorème, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, puisqu'elle correspond au cas $p = 3/2 > 1$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge aussi, et par le critère de comparaison, on conclut que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{4n^3+7}}$ converge. ◇

Exemple 5.25. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}\,.$$

On remarque dans le terme général la présence d'un comportement du type $\frac{1}{n^2}$; on peut l'extraire en mettant le n^2 en évidence au dénominateur, et en majorant le reste :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{4-\frac{1}{n^2}} \leqslant \frac{1}{3n^2}\,.$$

(En effet, $4-\frac{1}{n^2} \geqslant 3$ pour tout $n \geqslant 1$.) Mais puisque la série $\sum_n \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (car $p = 2 > 1$), le critère de comparaison implique que $\sum_n \frac{1}{4n^2-1}$ converge. ◇

5.7 Le critère de la limite du quotient

(ici, Video: v_series_critere_limite_quotient.mp4)

Théorème 5.26. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites. Supposons que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n suffisamment grand, et que*

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \textit{existe}.$$

Si $\alpha > 0$, alors soit $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent toutes les deux, soit elles divergent toutes les deux.

Preuve: Si le quotient $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers $\alpha > 0$, cela signifie qu'il est loin de zéro pour tous les indices n suffisamment grands. Plus précisément, prenons $\varepsilon := \alpha/2$. Alors il existe N tel que $|\frac{a_n}{b_n} - \alpha| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire que

$$0 < \frac{\alpha}{2} = \alpha - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant \alpha + \varepsilon = \frac{3\alpha}{2} \qquad \forall n \geqslant N$$

qui donne

$$0 < \frac{\alpha}{2} b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3\alpha}{2} b_n \qquad \forall n \geqslant N$$

Le critère de comparaison implique que si $\sum_n a_n$ converge, $\sum_n b_n$ converge aussi, et si $\sum_n a_n$ diverge alors $\sum_n b_n$ diverge aussi, et vice versa. □

Le théorème ci-dessus est très utile lorsqu'on a un terme général dans lequel on peut identifier un terme qui doit dominer, mais pour lequel aucune comparaison simple ne se présente.

Exemple 5.27. Considérons

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^3-5n-1}\,.$$

La présence du "n^3", qui est le terme dominant dans le dénominateur du terme général $a_n = \frac{1}{n^3-5n-1}$, suggère de considérer $b_n = \frac{1}{n^3}$. En effet, a_n et b_n sont tous deux positifs pour n suffisamment grand, et

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3-5n-1} = 1 > 0\,.$$

Par le théorème, la série $\sum_n a_n$ converge. Remarquons pourtant que $a_n > b_n$ pour tout $n \geqslant 2$! ◇

Exemple 5.28. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{3}{n^2+1}\right) .$$

Remarquons que $a_n = \sin(\frac{3}{n^2+1}) > 0$ pour tout n suffisamment grand. Si on se souvient du résultat qui dit que si $x_n \to 0$, alors $\frac{\sin(x_n)}{x_n} \to 1$, cela suggère de poser $b_n = \frac{3}{n^2+1}$; on a alors que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{3}{n^2+1})}{\frac{3}{n^2+1}} = 1 > 0 .$$

Puisque $\sum_n b_n = 3\sum_n \frac{1}{n^2+1}$ converge (son terme général étant $\leqslant \frac{3}{n^2}$), on conclut que $\sum_n a_n$ converge aussi. ◇

5.8 Séries absolument convergentes

(ici, Video: v_series_absolument_conv.mp4)

Définition 5.29. Si $\sum_n |a_n|$ converge, on dit que $\sum_n a_n$ est **absolument convergente**.

Exemple 5.30. La série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est convergente (car c'est une série alternée satisfaisant au critère de Leibniz), mais elle est aussi absolument convergente, car

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} ,$$

qui est convergente ($p = 2 > 1$). Donc l'alternance de signes, dans la série de départ, n'est pas essentielle pour garantir sa convergence. ◇

Exemple 5.31. La série harmonique alternée est convergente, comme on sait, mais elle n'est *pas* absolument convergente, car en prenant la valeur absolue de chacun de ses termes on obtient

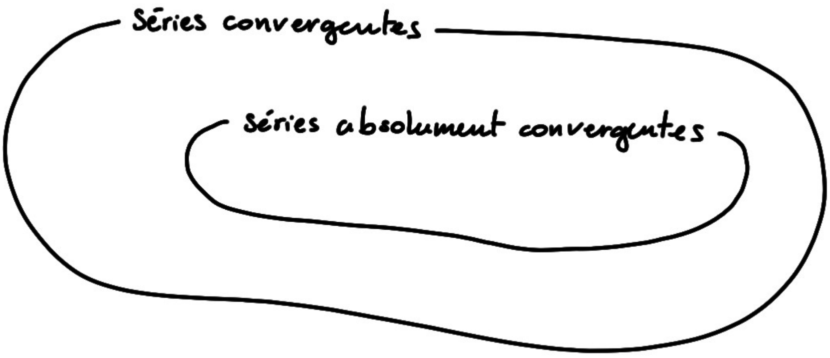
$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} ,$$

la série harmonique, qui est divergente. Donc la série harmonique alternée a "besoin" de l'alternance de ses signes pour pouvoir converger. ◇

Ce dernier exemple montre qu'une série peut être convergente sans être absolument convergente. D'autre part, on a le résultat important suivant, qui montre que la notion de convergence absolue est plus forte que celle de convergence :

Théorème 5.32. *Si $\sum_n a_n$ converge absolument, alors elle converge.*

Donc l'ensemble des séries absolument convergentes forme un sous-ensemble de l'ensemble des séries convergentes :



Preuve: Définissons

$$s_n := a_1 + \cdots + a_n$$
$$\overline{s}_n := |a_1| + \cdots + |a_n| \,.$$

Comme $\sum_n a_n$ est absolument convergente, la suite $\overline{s}_n$ converge, ce qui implique que c'est aussi une suite de Cauchy. Or pour tout $n \geqslant m$, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \big|a_{m+1} + \cdots + a_n\big| \\ &\leqslant |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \\ &= \overline{s}_n - \overline{s}_m \\ &= |\overline{s}_n - \overline{s}_m| \,. \end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que $\overline{s}_n$ est croissante.) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(\overline{s}_n)$ est une suite de Cauchy, il existe N tel que $|\overline{s}_n - \overline{s}_m| \leqslant \varepsilon$ pour tous $n, m \geqslant N$. Par l'inégalité ci-dessus, ceci implique que $|s_n - s_m| \leqslant \varepsilon$ pour tout $m, n \geqslant N$. On a donc montré que (s_n) est une suite de Cauchy, et donc elle converge : $\sum_n a_n$ est convergente. □

Le théorème peut parfois être utile pour l'étude de la convergence (habituelle) d'une série :

Exemple 5.33. Étudions la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{3\sin(n) - 5\cos(n^2)}{2^n + \sqrt{n}} \,.$$

Le numérateur contient des parties oscillantes qui compliquent l'étude de la convergence. Pourtant, on peut majorer sa valeur absolue,

$$|3\sin(n) - 5\cos(n^2)| \leqslant 3 + 5 = 8 \,,$$

et obtenir

$$0 \leqslant |a_n| = \left|\frac{3\sin(n) - 5\cos(n^2)}{2^n + \sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{8}{2^n} =: b_n \,.$$

Comme $\sum_n b_n = 8 \sum_n \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$), le critère de comparaison implique que $\sum_n |a_n|$ converge. Donc $\sum_n a_n$ converge absolument, et par le théorème ci-dessus, ceci implique que $\sum_n a_n$ converge. ◇

Dans les deux prochaines sections, nous verrons deux critères très utiles qui garantissent la convergence absolue (et donc la convergence) d'une série.

5.9 Le critère de d'Alembert

(ici, Video: v_series_critere_quotient.mp4)

Théorème 5.34. *Soit* (a_n) *une suite pour laquelle la limite*

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existe, ou est $+\infty$.

1) *Si* $\rho < 1$, *alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument (donc converge).*
2) *Si* $\rho > 1$, *alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Preuve: La preuve commence de la même façon que celle pour le critère de l'Alembert pour les suites :

1) Si $\rho < 1$, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un entier N tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On a donc, pour tout $n > N$,

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqslant (1-\varepsilon)|a_{n-1}| \\ &\leqslant (1-\varepsilon)^2|a_{n-2}| \\ &\leqslant \dots \\ &\leqslant (1-\varepsilon)^{n-N}|a_N| =: c_n\,. \end{aligned}$$

Mais comme c_n est, à une constante près, le terme général d'une série géométrique (de raison $r = 1-\varepsilon < 1$), la série $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$ converge. Par le critère de comparaison, $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ converge aussi, et donc $\sum_n a_n$ converge absolument.

2) On a déjà vu (Critère de d'Alembert pour les suites) que $\rho > 1$ implique que $|a_n| \to \infty$, et donc a_n ne tend pas vers zéro, ce qui implique que $\sum_n a_n$ diverge. □

Exemple 5.35. Considérons

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-9)^k}{k!}\,.$$

Comme une comparaison avec une série plus simple n'est pas immédiatement facile, on peut calculer

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-9)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{(-9)^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{9}{k+1} = 0\,.$$

Par le théorème, la série est absolument convergente, et donc convergente. ◇

Exemple 5.36. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$$

On a

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!^3}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^3}{(2n)!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!^3}{n!^3} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)} = +\infty\,. \end{aligned}$$

Donc la série est divergente. De plus, puisque tous ses termes sont positifs, on peut écrire

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^3}{(2n)!} = +\infty$$

◇

Le théorème ci-dessus ne dit rien sur ce qui se passe lorsque $\rho = 1$, ce qui fait qu'il y a beaucoup de cas où il est inefficace pour étudier une série. Par exemple, on connaît bien les séries du type $\sum_n \frac{1}{n^p}$, et pourtant, pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} = 1\,,\end{aligned}$$

donc le critère ne permet de traiter aucune valeur de p.

Donc lorsque $\rho = 1$, une autre méthode doit être employée pour étudier la convergence/divergence de la série.

5.10 Le critère de Cauchy

(ici, Video: v_series_critere_Cauchy.mp4)

Théorème 5.37. *Soit (a_n) une suite réelle, telle que la limite*

$$\sigma := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

est soit finie, soit $+\infty$.

1) *Si $\sigma < 1$, alors $\sum_n a_n$ converge absolument (et donc converge).*
2) *Si $\sigma > 1$, alors $\sum_n a_n$ diverge.*

Preuve: 1) Supposons $\sigma < 1$. Alors il existe $0 < \varepsilon < 1$ et un entier N tel que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On a donc que

$$|a_n| \leqslant (1-\varepsilon)^n \qquad \forall n \geqslant N\,,$$

Par le critère de comparaison, comme la série associée à $b_n := (1-\varepsilon)^n$ converge (géométrique de raison $r = 1-\varepsilon$), celle associée à $|a_n|$ converge aussi.

2) Semblable, mais dans ce cas on montre que $|a_n| \to \infty$, et donc a_n ne tend pas vers zéro, et donc la série $\sum_n a_n$ diverge. □

Exemple 5.38. La série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

converge, puisque

$$\begin{aligned}\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{(n-1)+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \\ &= \tfrac{1}{e} \cdot 1 < 1\,.\end{aligned}$$

◇

Le critère de Cauchy existe en fait dans une forme un peu plus forte, dans laquelle la définition de σ est légèrement différente :

$$\sigma := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

mais où la conclusion est la même : si $\sigma < 1$ alors la série converge absolument, et si $\sigma > 1$ alors la série diverge.

L'avantage de cette deuxième version est que l'on peut étudier certaines séries pour lesquelles la limite qui définit σ dans la première définition n'existe pas, alors qu'elle possède une limite supérieure.

Exemple 5.39. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(-1)^n\right)^n\,.$$

Remarquons qu'ici,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(-1)^n\,,$$

qui n'a pas de limite lorsque $n \to \infty$. Pourtant,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1\,,$$

et donc par la nouvelle version du critère, la série converge.

Remarquons qu'on aurait aussi simplement pu écrire

$$|a_n| = \left|\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(-1)^n\right|^n \leqslant (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})^n = (\tfrac{3}{4})^n\,.$$

Ainsi, par comparaison avec la série géométrique de raison $r = \frac{3}{4}$, on conclut que $\sum_n a_n$ converge absolument. ◇

5.11 Séries dépendant d'un paramètre

Souvent, les séries sont utilisées pour définir des *fonctions d'une variable réelle*.

Supposons que le terme général d'une série dépende d'un paramètre réel. Cela signifie que pour chaque $n \geqslant 1$, on a une fonction

$$x \mapsto a_n(x)\,.$$

Pour simplifier, on supposera que toutes ces fonctions sont définies sur le même intervalle $a_n : I \to \mathbb{R}$.

On peut donc définir, formellement, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto f(x) := \sum_{n \geqslant 1} a_n(x) \,.$$

Évidemment, on ne peut étudier cette fonction que sur les points x où la série qui définit $f(x)$ est convergente. Le *domaine* de f est donc

$$D(f) = \Big\{ x \in I \,\Big|\, \sum_{n \geqslant 1} a_n(x) \text{ converge} \Big\} \,.$$

Exemple 5.40. Considérons le terme général

$$a_n(x) = x^n \,.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, a_n est une fonction définie sur $I = \mathbb{R}$. On remarque alors que $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^n$ n'est autre que la série géométrique, où x joue le rôle de raison. On sait donc qu'elle converge si et seulement si $|x| < 1$. On a donc $D(f) =]-1, 1[$.

Il est intéressant de remarquer que pour $x \in D(f)$, $f(x)$ est en fait $\frac{1}{1-x}$! ⋄

Exemple 5.41. Si on considère

$$a_n(x) = \frac{(x+3)^n}{n!} \,,$$

défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, utilisons le critère de l'Alembert pour étudier la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(x+3)^n}{n!} \,.$$

On peut étudier la convergence de cette série, pour un x fixé, en étudiant

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| .$$

Or en développant,

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}/(n+1)!}{(x+3)^n/n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x+3|}{n+1} = 0 \,.$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge pour cette valeur de x, et donc $f(x)$ est bien définie en ce point. Puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $D(f) = \mathbb{R}$. ⋄

Informel 5.42. Une fonction définie par une série est en général *très* difficile à étudier ! Si on considère par exemple le terme général $a_n(x) = \frac{\cos(9^n x)}{2^n}$, alors

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(9^n x)}{2^n}$$

est bien définie partout : $D(f) = \mathbb{R}$. En effet,

$$0 \leqslant |a_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \,,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$. Cette fonction, étudiée par Weierstrass au 19ème siècle, possède des propriétés très particulières : elle est continue partout, mais dérivable nulle part (on définira ces termes plus tard dans le cours).