Chapitre 2

Notions élémentaires

2.1 Sommes et produits

2.1.1 Sommes finies

(ici, Video: v_elementaire_sommes.mp4)

Lorsqu'on considère des sommes de beaucoup de nombres, on a avantage à utiliser une notation compacte, qui évite d'écrire explicitement tous les termes de la somme :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N \equiv \sum_{k=1}^{N} x_k \,.$$

On lit ce dernier symbole "*somme des x_k, pour k allant de 1 à N*", et on appelle x_k le **terme général** de la somme.

Notons que l'indice k utilisé ci-dessus est **muet**, dans le sens où il n'est utilisé "temporairement" que pour nommer l'entier sur lequel on somme. On pourrait donc le nommer de façon arbitraire, cela ne change pas la valeur de la somme :

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{j=1}^{N} x_j = \sum_{n=1}^{N} x_n \,.$$

Lemme 2. *La somme satisfait aux propriétés suivantes.*

- ⋆ *Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{N} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{N} a_k$.*
- ⋆ $\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k) = \Big(\sum_{k=1}^{N} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{N} b_k\Big)$.

Il existe certains cas où le terme général est assez simple pour que la valeur de la somme puisse être calculée explicitement en fonction de N :

Exemple 2.1. Si le terme général est constant, $x_k = C$ (pour tout k), alors

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \underbrace{C + C + C + \cdots + C}_{N \text{ fois}} = CN \,.$$

◇

Exemple 2.2. Si $x_k = k$, on montrera plus tard par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}\,.$$

◇

Exemple 2.3. La **somme harmonique** a pour terme général $x_k = \frac{1}{k}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}\,.$$

On ne peut hélàs pas la calculer exactement en fonction de N, mais nous verrons plus tard qu'elle se comporte, lorsque N est grand, essentiellement comme $\log N$. ◇

Il y a un autre type de sommes que l'on sait sommer exactement, et qui sera d'importance capitale pour la suite :

2.1.2 Les sommes géométriques

Soit $r \in \mathbb{R}$ un réel fixé, appelé **raison**. La somme de terme général $x_k = r^k$, pour k allant de 0 à N,

$$\boxed{S_N := \sum_{k=0}^{N} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N\,,}$$

est appelée **somme géométrique**.

On peut calculer S_N exactement, quelle que soit la valeur de N. En effet, si $r = 1$, alors $S_N = N+1$ (puisque la somme S_N contient $N+1$ termes constants, égaux à 1). Pour les autres valeurs de r :

Lemme 3. *Si $r \neq 1$, alors*

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}\,.$$

Preuve: Remarquons que $S_N = S_{N-1} + r^N$, et que

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N \\ &= 1 + r(1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1}) \\ &= 1 + rS_{N-1} \\ &= 1 + r(S_N - r^N)\,. \end{aligned}$$

Cette égalité permet d'écrire $(1-r)S_N = 1 - r^{N+1}$, et puisqu'on suppose que $r \neq 1$, on peut diviser des deux côtés par $1 - r$, ce qui donne bien $S_N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$. □

Exemple 2.4. On peut par exemple calculer,

$$\begin{aligned} 7^{100} + 7^{101} + 7^{102} + \cdots + 7^{1000} &= 7^{100}\big(1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{900}\big) \\ &= 7^{100} \sum_{k=0}^{900} 7^k \\ &= 7^{100}\frac{1 - 7^{901}}{1 - 7} \\ &= \frac{7^{1001} - 7^{100}}{6}\,. \end{aligned}$$

◇

2.1.3 Produits finis

Il existe aussi un symbole utile pour le produit d'un nombre fini de réels :

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_N \equiv \prod_{k=1}^{N} a_k \,,$$

qui se lit "*produit des a_k, pour k allant de 1 à N.*

2.2 Fonctions

(ici, Video: v_fonctions_ensemble_image.mp4)

2.2.1 Notion de fonction

Dans cette section, on rappelle quelques définitions élémentaires relatives à la notion de *fonction*. Même si dans ce cours on s'intéressera surtout à des fonctions réelles d'une variable réelle, ce que l'on présente ici est très général et s'applique à des situations très diverses, comme par exemple l'étude des applications linéaires en algèbre linéaire.

Définition 2.5. Soient A, B deux ensembles quelconques non-vides. Une **fonction de A dans B**,

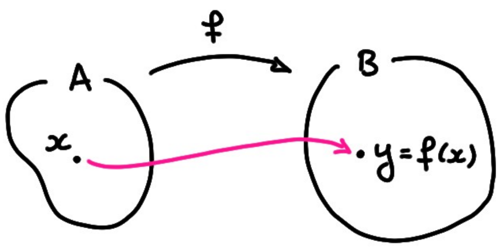
$$f : A \to B \,,$$

est une règle qui associe à chaque élément $x \in A$ un (et un seul) élément $y \in B$, appelé **l'image de x (par f)**, et on écrit

$$y = f(x) \,.$$

On dit alors que x est une **préimage** (ou un **antécédent**) de y.

Lorsque $x \in A$ est associé à $y \in B$, on pourra penser à cette association comme à une "flèche de x vers y". En termes de flèches, une fonction de A dans B est donc bien définie une fois que l'on a, pour chaque $x \in A$, exactement une flèche reliant ce x à un (et un seul) $y \in B$. En particulier, il ne peut pas y avoir deux flèches sortant d'un x.



Pour des raisons évidentes, A est parfois appelé l'**ensemble de départ**, et B l'**ensemble d'arrivée**. Pour bien indiquer l'ensemble de départ et d'arrivée d'une fonction, on écrit

$$\begin{aligned} f : A &\to B && (2.1)\\ x &\mapsto y = f(x) \,. && (2.2) \end{aligned}$$

Exemple 2.6. Considérons $A = \mathbb{Z}$, $B = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$, et définissons la fonction $f : A \to B$ comme suit : pour $x \in A$,

$$f(x) := \begin{cases} \bigstar & \text{si } x \leqslant -17\,, \\ \clubsuit & \text{si } -17 < x < -16\,, \\ \spadesuit & \text{si } -16 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ \blacklozenge & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

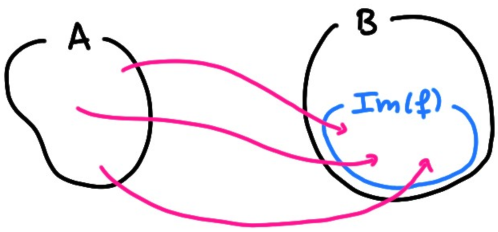
Ici, $\bigstar$ et $\blacklozenge$ possèdent chacun une infinité de préimages, $\spadesuit$ possède 18 préimages, et $\clubsuit$ ne possède aucune préimage. ◇

2.2.2 Ensemble image

Il est naturel de considérer, pour commencer l'étude d'une fonction, de déterminer quels sont les éléments de l'ensemble d'arrivée qui possèdent au moins une préimage :

Définition 2.7. L'**ensemble image de** $f : A \to B$ est défini par

$$\mathrm{Im}(f) := \big\{ y \in B \;:\; \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y \big\}\,.$$

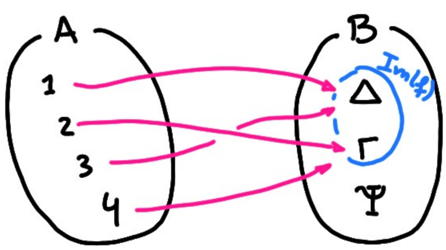


Par la définition de fonction, une flèche sort de chaque $x \in A$; mais tous les $y \in B$ ne sont pas forcément atteints par une flèche. L'ensemble image est donc constitué des éléments de l'ensemble d'arrivée qui sont atteints par au moins une flèche. On peut imaginer $\mathrm{Im}(f)$ obtenu en "balayant" tout A avec la variable x, et en observant tous les $y = f(x) \in B$ obtenus.

Exemple 2.8. Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\Delta, \Gamma, \Psi\}$, et $f : A \to B$ la fonction définie par :

$$f(1) = \Delta\,, \quad f(2) = \Gamma\,, \quad f(3) = \Delta\,, \quad f(4) = \Gamma\,.$$

Alors $\mathrm{Im}(f) = \{\Delta, \Gamma\}$ (puisque Ψ n'a pas de préimage).



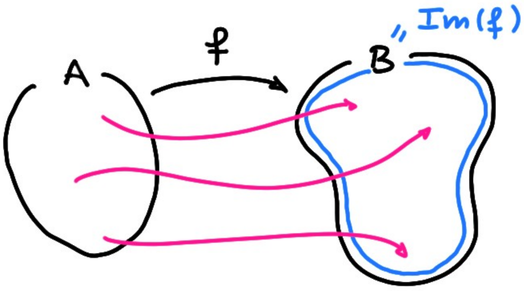
◇

2.2.3 Surjection

(ici, Video: v_fonctions_surjection.mp4)

Par définition, l'ensemble image d'une fonction $f : A \to B$ est un sous-ensemble de B, $\mathrm{Im}(f) \subset B$, et il est naturel de considérer les fonctions pour lesquelles il coïncide exactement avec B :

Définition 2.9. $f : A \to B$ est **surjective** si $\mathrm{Im}(f) = B$, c'est-à-dire si chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins une préimage.



Informel 2.10. Une fonction est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée est atteint par au moins une flèche ; en d'autres termes, si les flèches qui partent de A "remplissent bien" tout l'ensemble d'arrivée.

Exemple 2.11. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto f(x) = x + 1 \end{aligned}$$

est surjective. En effet, prenons un $y \in \mathbb{Z}$ quelconque. Si on considère $x := y - 1$, alors

$$f(x) = x + 1 = (y - 1) + 1 = y\,,$$

donc x est antécédent de y, et donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. ◇

Exemple 2.12. Soit A l'ensemble des étudiant.e.s dans l'auditoire, et soit $B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Considérons

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x)\,, \end{aligned}$$

où $f(x)$ est le nombre de frères et soeurs de x. Pour trouver $\mathrm{Im}(f)$, on peut procéder comme suit : pour tout $y \in B$, on pose la question : "Qui possède exactement y frères et soeurs ?" Si au moins une main se lève, c'est que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Dès qu'on a un y pour lequel aucune main se lève, c'est que f n'est pas surjective. Pour s'assurer facilement que f n'est effectivement pas surjective, on peut simplement poser la question : "Est-ce que quelqu'un a plus de 100 frères et soeurs ?" Si personne ne lève la main, c'est que $\mathrm{Im}(f) \subset \{0, 1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$. (Si on sonde l'auditoire, on observe probablement quelque chose comme $\mathrm{Im}(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.) ◇

Toute fonction peut être transformée en une fonction surjective, en modifiant simplement son ensemble d'arrivée. En effet, si

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

n'est pas surjective, c'est que son ensemble d'arrivée B est "trop grand" : $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble stricte de B. On peut alors retirer les éléments de B qui ne sont pas dans l'image, et obtenir une fonction surjective. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A &\to \mathrm{Im}(f) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est surjective.

Exemple 2.13. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

n'est pas surjective, puisque si $y \in \mathbb{N}$ est impair, il ne possède pas de préimage. Ici, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}_{\text{pairs}}$, l'ensemble de tous les entiers positifs pairs. En restreignant son ensemble d'arrivée à $\mathrm{Im}(f)$, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}_{\text{pairs}} \\ x &\mapsto 2x\,, \end{aligned}$$

qui est surjective. ◇

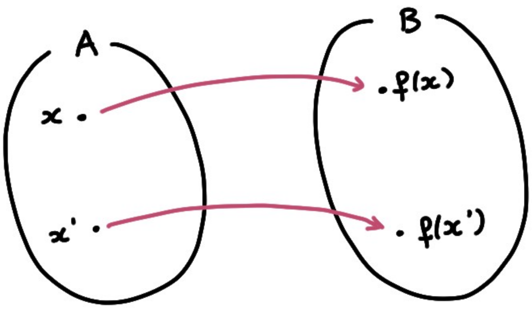
2.2.4 Injection

(ici, Video: v_fonctions_injection.mp4)

Une deuxième chose naturelle à considérer, pour une fonction donnée, est de savoir si celle-ci *sépare les points*, c'est-à-dire si des points différents, dans l'ensemble de départ, ont des images différentes :

Définition 2.14. $f : A \to B$ est **injective** si $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$.

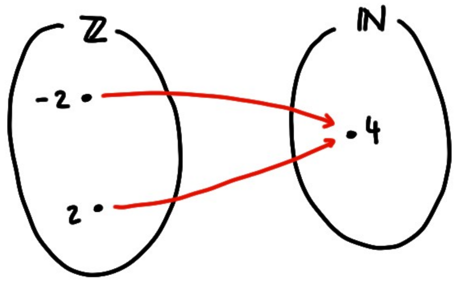
Informel 2.15. Si la fonction est injective, des flèches qui partent de points différents doivent arriver en des points différents !



Exemple 2.16. Considérons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2\,. \end{aligned}$$

Puisque $f(-2) = 4$ et $f(2) = 4$, f n'est pas injective.



◇

Une caractérisation équivalente de l'injectivité, plus commode à manipuler dans la pratique, est la suivante : f est injective si $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

Exemple 2.17. Montrons que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

est injective. Pour ce faire, prenons deux éléments $x, x' \in \mathbb{N}$, et supposons que $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x'^2}{x'^2+1}\,.$$

Quelques manipulations montrent que cette dernière identité est équivalente à

$$x^2 - x'^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-x')(x+x') = 0\,,$$

qui n'est vérifiée que si au moins une des parenthèses est nulle. Or la première est nulle si $x = x'$, et puisque $x, x' \in \mathbb{N}$, la deuxième ne peut s'annuler que si $x = x' = 0$. Dans tous les cas, on a bien montré que $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$, donc f est injective. ◇

2.2.5 Bijection

(ici, Video: v_fonctions_bijection.mp4)

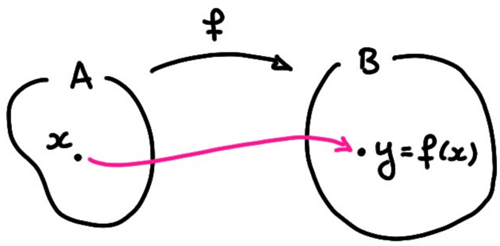
Voyons ce qui se passe lorsqu'une fonction possède en même temps les deux propriétés introduites dans les sections précédentes.

Définition 2.18. Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

L'intérêt d'une fonction bijective est qu'on peut l'*inverser*, ce qui signifie revenir de l'ensemble image à l'ensemble de départ, sans ambiguïté.

En effet, supposons que $f : A \to B$ est bijective, et fixons un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée, $y \in B$.

1) Comme f est surjective, y possède *au moins* une préimage.
2) Comme f est injective, y possède *au plus* une préimage.



On en déduit que y possède *exactement une* préimage dans l'ensemble de départ : on la note $f^{-1}(y)$. Avoir associé à tout $y \in B$ un unique élément $f^{-1}(y) \in A$ signifie que nous avons *défini une fonction* de B dans A. Puisque cette fonction permet d'obtenir l'unique préimage de chaque élément de B, on l'appelle **la réciproque de** f :

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Par définition, la réciproque permet de récupérer la préimage :

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A\,.$$

Mais aussi,

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B\,.$$

Remarque 2.19. L'utilisation du symbole "f^{-1}", pour la réciproque, est largement répandue, et nous l'utiliserons, mais elle peut prêter à confusion. En effet, pour des fonctions numériques, $f^{-1}(y)$ ne doit en aucun cas être confondu avec $f(y)^{-1}$, qui signifie $\frac{1}{f(y)}$! ◇

Exemple 2.20. Montrons que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x-5}{3} \end{aligned}$$

est bijective. (On utilise des couleurs uniquement pour distinguer les ensembles de départ et d'arrivée.)

- ⋆ Soient $x, x' \in \mathbb{Q}$. On a

  $$f(x) = f(x') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{3} = \frac{x'-5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = x'\,,$$

  donc f est injective.

- ⋆ Soit $y \in \mathbb{Q}$. Montrons que y possède une préimage, à savoir un $x \in \mathbb{Q}$ tel que $y = f(x) = \frac{x-5}{3}$. En effet, on peut simplement isoler x dans "$y = \frac{x-5}{3}$" et trouver $x = 3y+5$. Comme $3y+5 \in \mathbb{Q}$, on a bien trouvé une préimage pour y. Donc f est surjective.

Maintenant que f est bijective, donnons sa réciproque explicitement :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ y &\mapsto f^{-1}(y)\,. \end{aligned}$$

L'expression de $f^{-1}(y)$ a en fait été trouvée plus haut : il s'agit d'isoler x dans $y = f(x)$, ce qui donne $x = f^{-1}(y) = 3y + 5$. ◇

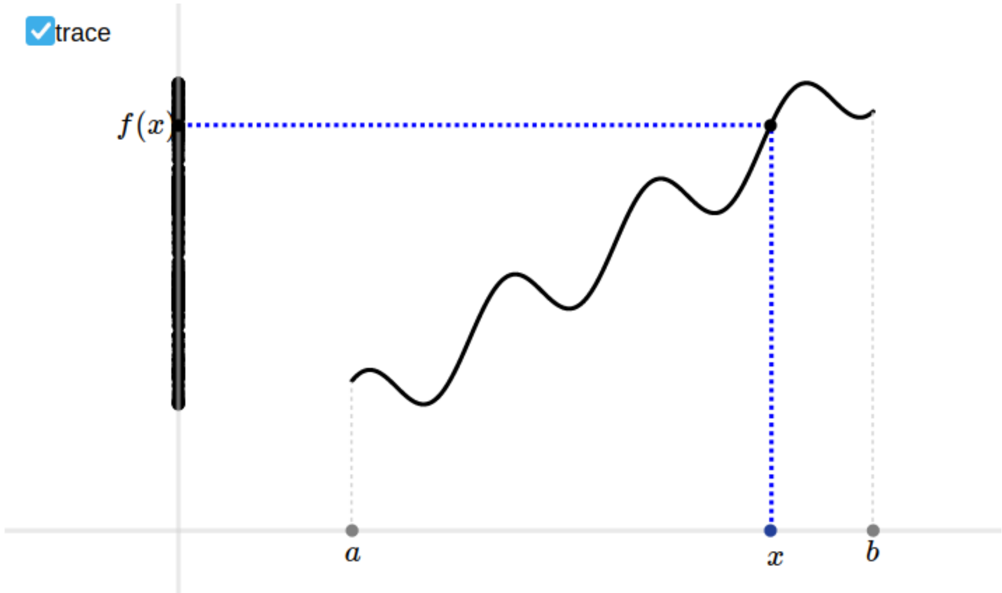
2.3 Cas des fonctions réelles

Dans cette section, on considère des fonctions $f : A \to B$ que l'on appellera **réelles**, ce qui signifie que A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. L'étude des fonctions de ce type constitue un des objectifs de ce cours, surtout via la notion de limite qui sera introduite bien plus tard. Ici nous ne ferons qu'illustrer les notions de la section précédente dans ce cas particulier.

2.3.1 Graphe et ensemble image

Lorsque A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on peut représenter géométriquement toute l'information contenue dans une fonction $f : A \to B$ dans son **graphe**, qui est défini comme l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan cartésien, obtenus en laissant x parcourir tout l'ensemble A :

$$\text{graphe}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, \, y = f(x) \in B\} .$$



Sur l'animation ci-dessus, on peut "voir" $\text{Im}(f)$ en activant "trace", et en faisant varier $x \in A$, pour voir apparaître les points de $\text{Im}(f)$ sur l'axe y.

Dans la pratique, on détermine l'ensemble image de $f : A \to B$ par le calcul : en cherchant les $y \in B$ pour lesquels l'équation

$$f(x) = y \tag{2.3}$$

possède au moins une solution $x \in A$. Dans les cas simples, cela revient à pouvoir isoler x dans cette dernière expression.

Exemple 2.21. Soit

$$\begin{aligned} f : [2, 3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{3x - 4}{2} . \end{aligned}$$

Par définition,

$$\text{Im}(f) = \big\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2, 3] \text{ tel que } f(x) = y \big\}$$

Pour calculer $\text{Im}(f)$, fixons $y \in \mathbb{R}$, et essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire

$$y = \frac{3x - 4}{2} .$$

En isolant simplement x, on trouve la préimage de y :

$$x = \frac{2y + 4}{3} .$$

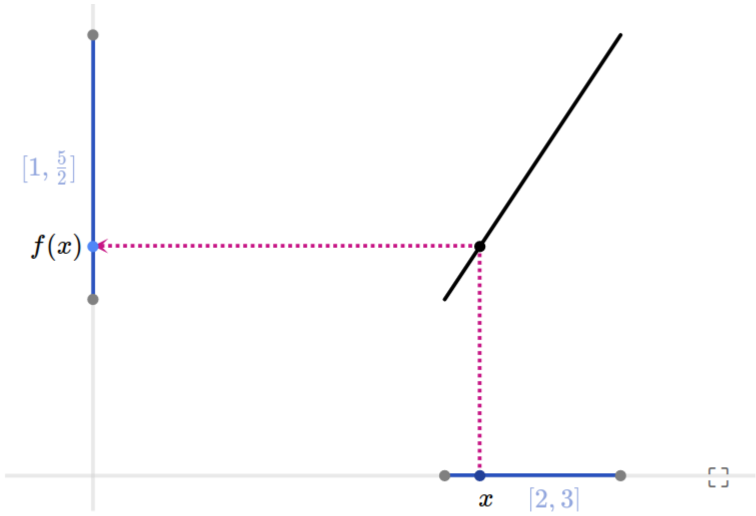
Comme il faut que la préimage appartienne à $A = [2, 3]$, on veut que

$$2 \leqslant \frac{2y + 4}{3} \leqslant 3 ,$$

qui est équivalente, après quelques manipulations, à

$$1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{2}\,.$$

On résume : l'équation $y = f(x)$ possède une solution $x \in [2,3]$ si et seulement $y \in [1, \frac{5}{2}]$. Ceci signifie que $\mathrm{Im}(f) = [1, \frac{5}{2}]$. On peut le vérifier graphiquement :



◇

2.3.2 Injections, surjections, bijections

Dans le cas des fonctions réelles, l'injectivité et la surjectivité peuvent se caractériser en termes du graphe de f, comme suit. Une fonction réelle $f : A \to B$ est

- ⋆ **surjective** si toute droite horizontale d'équation $y = b$, avec $b \in B$, coupe le graphe de f en au moins un point,
- ⋆ **injective** si toute droite horizontale d'équation $y = b$, avec $b \in B$, coupe le graphe de f en au plus un point .

2.3.3 Graphe de la fonction réciproque

Si une fonction réelle f est bijective, comment le graphe de f^{-1} est-il relié à celui de f ?

Plus précisément, considérons une fonction

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

On rappelle que le graphe de f est l'ensemble des paires (x, y), où $y = f(x)$ et $x \in A$. Si f est bijective, le graphe de sa réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

est l'ensemble des paires (y, x), où $x = f^{-1}(y)$ et $y \in B$. On a donc qu'un point (x, y) appartient au graphe de f si et seulement si le point (y, x) appartient au graphe de f^{-1}. Or dans le plan, l'opération qui transforme (x, y) en (y, x) est une réflexion par rapport à la diagonale du premier quadrant. On en conclut que si le graphe de f est connu, alors le graphe de f^{-1} s'obtient *en réfléchissant celui de f à travers la diagonale du premier quadrant*. Voyons quelques exemples.

Exemple 2.22. Considérons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{2} + 1\,. \end{aligned}$$

Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$. Ceci signifie que

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{x'}{2} + 1\,,$$

qui après simplification donne $x = x'$. Donc f est injective. Ensuite, montrons que tout $y \in \mathbb{R}$ possède une préimage x. En effet, on peut isoler x dans $y = f(x) = \frac{x}{2} + 1$, qui donne $x = 2(y-1)$. Donc f est aussi surjective.

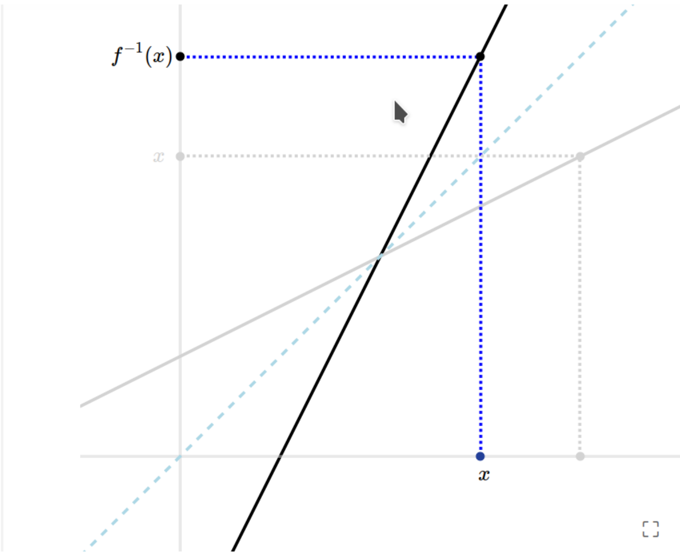
Ainsi, f est bijective, et sa réciproque est donnée par

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto 2(y-1)\,. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut nommer la variable comme on veut, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = 2(x-1)\,. \end{aligned}$$

Le graphe de $f^{-1}(x) = 2(x-1)$ s'obtient à partir de celui de $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, par une réflexion par rapport à la diagonale :



◇

Exemple 2.23. Considérons la fonction “au carré” :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\,. \end{aligned}$$

Puisque $f(-x) = f(x)$ pour tout x, f n'est pas injective. On peut la rendre injective en restreignant son ensemble de départ, en prenant par exemple $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\,. \end{aligned}$$

Cette fonction est maintenant injective puisque $f(x) = f(x')$ est équivalent à $x^2 - x'^2 = 0$, c'est-à-dire $(x - x')(x + x') = 0$. En se souvenant que $x, x' \in \mathbb{R}_+$, on voit que cette identité est vérifiée si et seulement si $x = x'$.

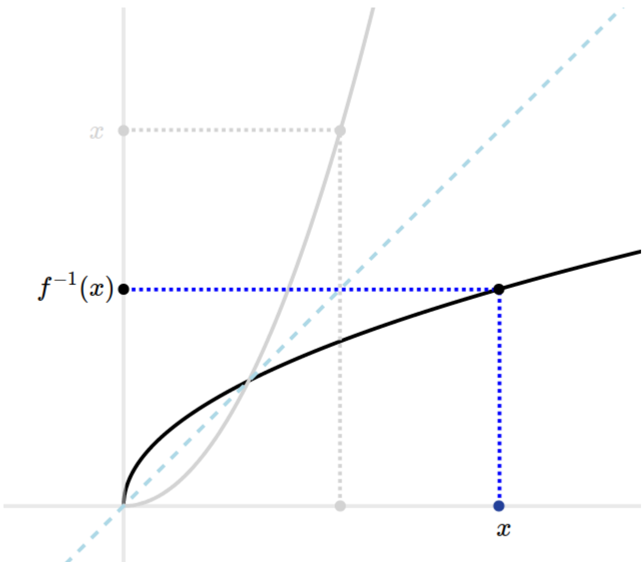
On montrera plus tard (voir **ici** (lien vers la section m_reels_xcarre_egal_2)) que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$ (plus précisément, nous montrerons que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = y$). Ainsi,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 , \end{aligned}$$

est bijective. Sa réciproque est appelée la fonction **racine carrée**, et s'écrit en général "$\sqrt{\cdot}$" :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y} . \end{aligned}$$

Son graphe s'obtient en réfléchissant celui de $f(x) = x^2$ à travers la diagonale du premier quadrant :



◇

2.4 Trigonométrie

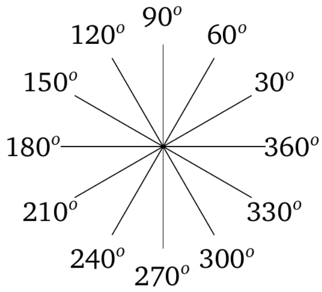
On rappelle ici les définitions et propriétés des principales fonctions trigonométriques.

Pour commencer, rappelons d'abord comment sont mesurés les angles dans le plan.

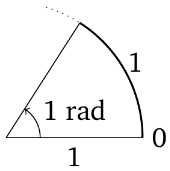
2.4.1 Sur la mesure des angles

La mesure des angles se fait par un choix d'unités, et ce choix est déterminé une fois que l'on fixe la valeur de la mesure de l'angle total (ouverture correspondant à "un tour complet").

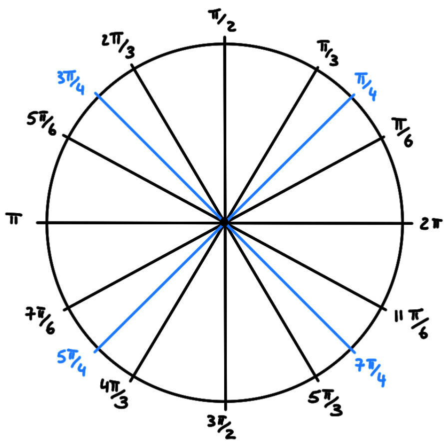
La mesure en **degrés** consiste à associer à l'angle total une mesure de 360 degrés, les autres angles étant mesurés de façon proportionnelle :



La mesure en **radians** est plus naturelle d'un point de vue géométrique, puisqu'elle consiste à mesurer une longueur le long d'un arc de cercle. Si la longueur parcourue est égale au rayon, ceci définit un angle de **un radian** :



L'angle total correspond donc à la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon 1, à savoir 2π. Quelques angles intermédiaires :



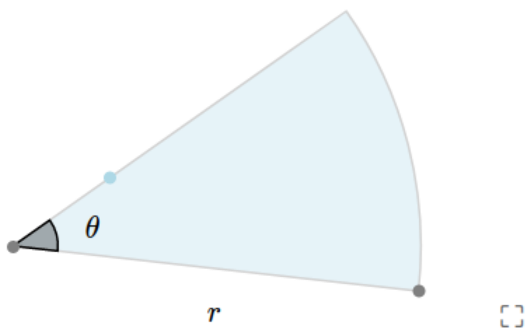
Soit un angle donné, dont la mesure en degrés est α_d et celle en radians est α_r. Puisque

$$\frac{\alpha_d}{360} = \frac{\alpha_r}{2\pi} ,$$

on a la formule de conversion :

$$\alpha_d = \frac{180}{\pi}\alpha_r .$$

Donnons en passant l'expression de l'aire A d'un secteur circulaire de rayon r, dont l'ouverture est un angle de θ radians :



Dans le cas où l'angle est total $\theta = 2\pi$, ce secteur est un disque, et donc son aire est égale à πr^2. Or pour un secteur quelconque, la proportionnalité existant entre l'angle θ et l'angle total doit être la même que la proportionnalité existant entre l'aire A du secteur et celle du disque :

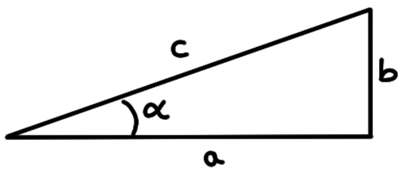
$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{A}{\pi r^2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2}r^2\theta}$$

2.4.2 Définitions des fonctions trigonométriques

Considérons un triangle rectangle, et distinguons un de ses angles non droit, que l'on notera α :



Le côté a est le **cathète adjacent à** α, le côté b est le **cathète opposé à** α, et c est **l'hypothénuse**.

Pour l'instant, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On associe trois nombres à α, représentant chacun un rapport entre une paire de côtés :

Définition 2.24. ⋆ Le **sinus de** α est défini par

$$\sin(\alpha) := \frac{b}{c}\,.$$

⋆ Le **cosinus de** α est défini par

$$\cos(\alpha) := \frac{a}{c}\,.$$

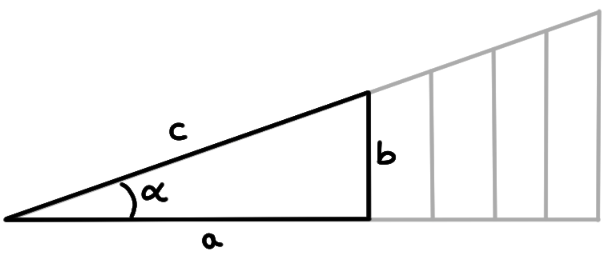
⋆ La **tangente de** α est définie par

$$\tan(\alpha) := \frac{b}{a}\,.$$

Remarquons que l'on a toujours

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\,.$$

Il est important de souligner que les nombres $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ sont définis comme étant des *proportions* dans le rectangle considéré ; ils ne dépendant donc pas du choix particulier fait pour le rectangle. N'importe quel autre triangle semblable peut être utilisé :

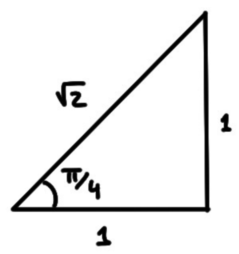


2.4.3 Valeurs remarquables

Si les nombres $\sin(\alpha), \cos(\alpha), \tan(\alpha)$ sont géométriquement bien définis, il est en général difficile de les *calculer* exactement.

Il existe pourtant certains angles, appelés **remarquables**, qui sont des parties rationnelles de 2π, pour lesquels ces nombres peuvent être calculés exactement. Commençons par les plus simples.

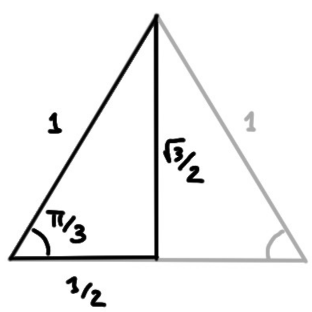
Considérons $\alpha = \frac{\pi}{4}$, que l'on peut représenter dans un triangle rectangle dont les deux cathètes sont de longueurs 1, ce qui implique que son hypothénuse a pour longueur $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$:



On a donc directement :

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \tan(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{1} = 1\,.\end{aligned}$$

Considérons ensuite $\alpha = \frac{\pi}{3}$, que l'on peut représenter comme un triangle rectangle égale à une moitié d'un triangle équilatéral de côté 1 (dont les trois angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$) :



Par Pythagore, le cathète opposé a longueur $l = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}\\ \tan(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

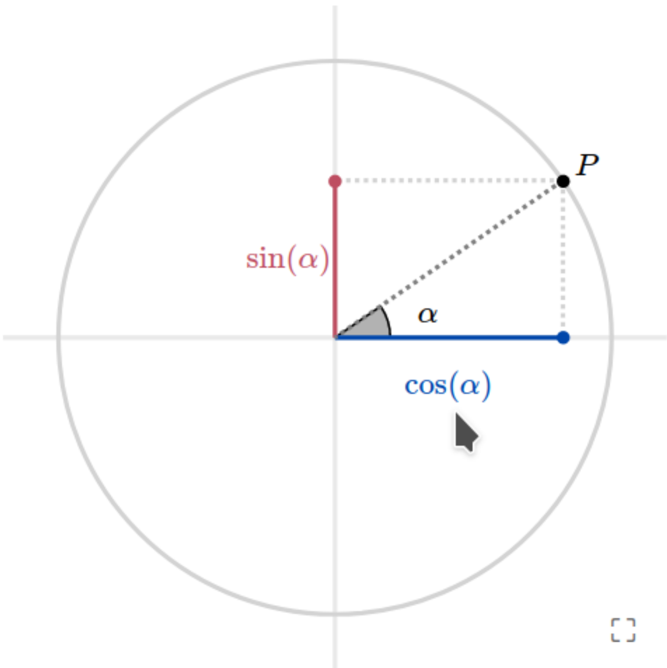
Remarquons que l'autre angle non-droit de ce triangle vaut $\frac{\pi}{6}$, et donc on a aussi

$$\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

2.4.4 Cercle trigonométrique et extension à tout $\mathbb{R}$

Nous l'avons dit plus haut, ce qui définit les fonctions trigonométriques sont des *proportions* (ici : des quotients de longueurs) ; elles ne dépendent pas du triangle utilisé pour les définir. On peut donc choisir de toujours les définir à partir d'un triangle dont l'hypothénuse est de longueur égale à 1.

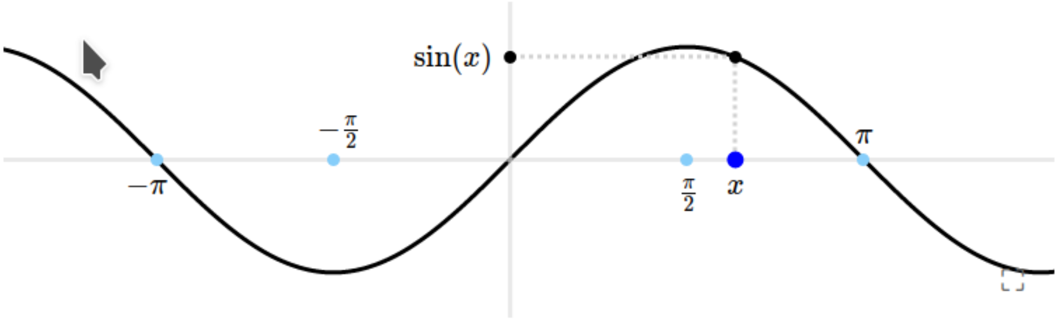
Or un triangle dont l'hypothénuse est de longueur 1 peut être placé dans le plan cartésien, avec l'angle à l'origine, le cathète adjacent le long de l'axe Ox. Son sommet , noté P sur l'image ci-dessous, est donc placé sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine, appelé **cercle trigonométrique**. Les trois nombres $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ peuvent alors être vus comme des longueurs (sur l'animation, faire varier α en déplaçant P) :



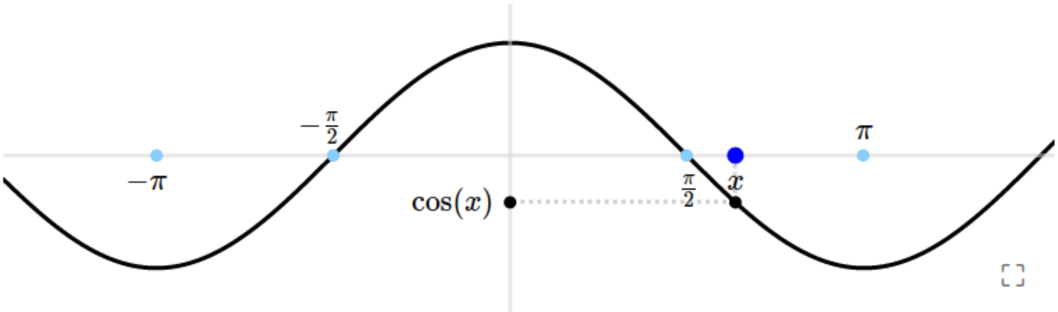
L'utilisation du cercle trigonométrique permet de *généraliser* naturellement ces fonctions, en les définissant pour un angle quelconque $\alpha \in \mathbb{R}$ (à part la tangente, définie pour tout angle qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

2.4.5 Graphes

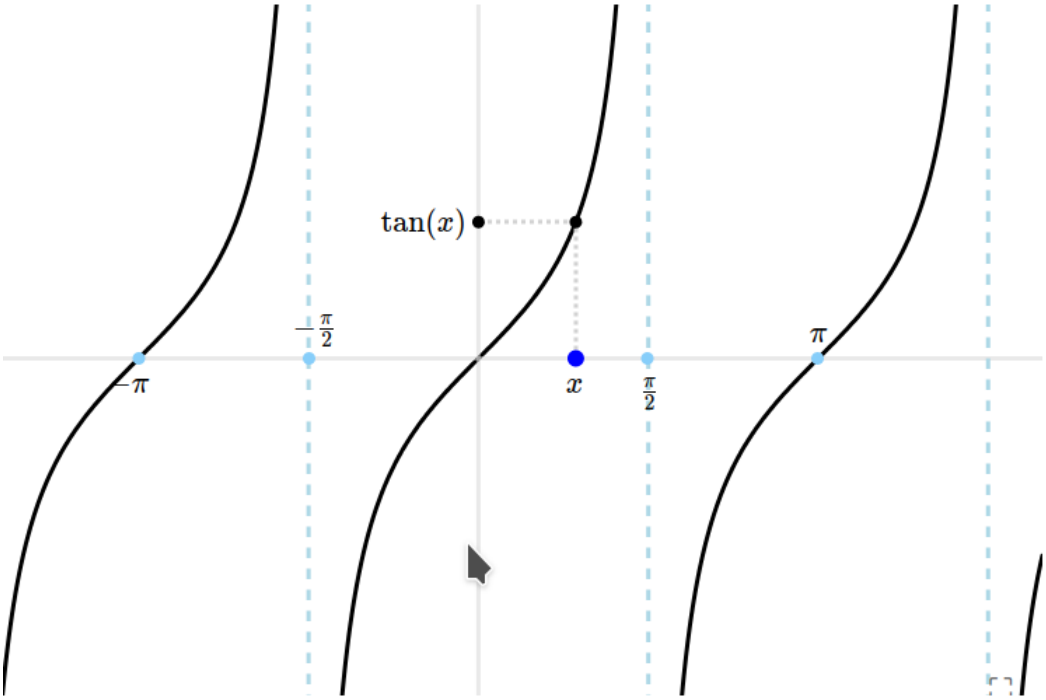
Graphe de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$:



Graphe de la fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$:



Graphe de la fonction $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$:



2.4.6 Propriétés

La définition géométrique des fonctions trigonométriques (sur le cercle trigonométrique) permet d'obtenir facilement leurs principales propriétés élémentaires.

Par exemple, sous la transformation $\alpha \mapsto \alpha + 2\pi$, ces fonctions sont inchangées :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)\,, \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)\,.$$

On a par contre que

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)\,,$$

on dit que la tangente est périodique, de **période** π.

Ensuite, sous la transformation $\alpha \mapsto \alpha + \pi$,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\pi) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha+\pi) &= -\cos(\alpha)\\ \tan(\alpha+\pi) &= \tan(\alpha)\,,\end{aligned}$$

et sous $\alpha \mapsto \alpha + \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(\alpha)\\ \cos(\alpha+\tfrac{\pi}{2}) &= -\sin(\alpha)\\ \tan(\alpha+\tfrac{\pi}{2}) &= \frac{-1}{\tan(\alpha)}\,.\end{aligned}$$

Sous la transformation $\alpha \mapsto \frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \sin(\alpha)\\ \tan(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)}\,.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha)\end{aligned}$$

2.4.7 Identités trigonométriques

Par le Théorème de Pythagore (dans le cercle trigonométrique), on obtient l'identité fondamentale

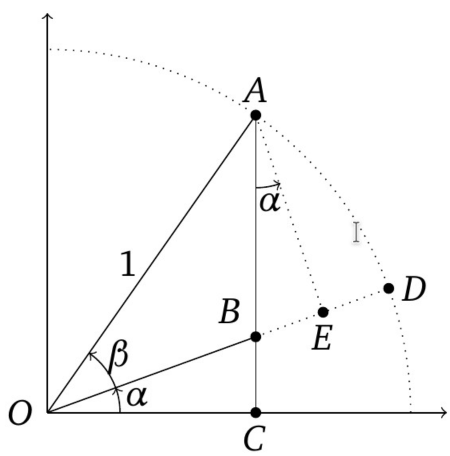
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1\,.$$

Passons aux identités fondamentales concernant les sommes d'angles :

Théorème 2.25. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\,.\end{aligned}$$

Preuve: Pour simplifier, supposons que $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, et plaçons l'angle $\alpha+\beta$ sur le cercle trigonométrique :



(Remarquons que l'angle α se retrouve en A, puisque $AE \perp OD$ et $AC \perp OC$.) Avec les points représentés sur cette image,

$$\sin(\alpha+\beta) = AC = AB + BC\,.$$

On remarque que

- ⋆ Dans le triangle OAE, où E est le projeté orthogonal de A sur OD, $OE = \cos(\beta)$, $AE = \sin(\beta)$.
- ⋆ Dans le triangle ABE, $AE = AB\cos(\alpha)$, $BE = AB\sin(\alpha)$.
- ⋆ Dans le triangle OBC, $BC = OB\sin(\alpha)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= AB + BC\\ &= AB + OB\sin(\alpha)\\ &= AB + (OE - BE)\sin(\alpha)\\ &= AB + (\cos(\beta) - AB\sin(\alpha))\sin(\alpha)\\ &= AB(1-\sin^2(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\\ &= AB\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\,.\end{aligned}$$

Mais puisque

$$AB = \frac{AE}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}\,,$$

on a bien que

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\\ &= \sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\,,\end{aligned}$$

ce qui démontre la première identité.

Pour la deuxième, on peut utiliser $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ et la première identité, en écrivant

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sin((\alpha+\beta)+\tfrac{\pi}{2})\\ &= \sin(\alpha + (\beta+\tfrac{\pi}{2}))\\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta+\tfrac{\pi}{2}) + \sin(\beta+\tfrac{\pi}{2})\cos(\alpha)\\ &= \sin(\alpha)(-\sin(\beta)) + \cos(\beta)\cos(\alpha)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\,.\end{aligned}$$

La troisième identité découle des deux premières puisque

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)}{\cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\left(1-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)}\\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\,.\end{aligned}$$

□

Comme conséquence, des formules très utiles dans la pratique :

Corollaire 2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}
\end{aligned}$$

Les formules ci-dessus permettent de trouver des formules exactes pour des angles plus compliqués que les quelques angles remarquables mentionnés plus haut. En effet, si on sait par exemple que $\cos(\frac{\alpha}{2}) \geqslant 0$, et qu'on connaît $\cos(\alpha)$, on peut utiliser la formule ci-dessus comme suit :

$$\cos(\tfrac{\alpha}{2}) = +\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}\,.$$

Exemple 2.26. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$, et donc en posant $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{8}) &= \cos(\tfrac{\alpha}{2}) \\
&= \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,,
\end{aligned}$$

et donc

$$\sin(\tfrac{\pi}{8}) = +\sqrt{1-\cos^2(\tfrac{\pi}{8})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,,$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,.$$

◇

L'exemple ci-dessus montre que l'on peut, a priori, calculer les valeurs exactes des fonctions trigonométriques pour tous les angles de la forme $\frac{\pi}{2^n}$.

Corollaire 3. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\sin\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x-y}{2}\Big)
\end{aligned}$$

Preuve: Montrons la première identité. En utilisant la formule du dessus, on développe les termes du membre de droite,

$$\begin{aligned}
\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= \sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{y}{2}) \\
\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big) &= \cos(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2}) - \sin(\tfrac{x}{2})\sin(-\tfrac{y}{2}) \\
&= \cos(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2}) + \sin(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{y}{2})\,.
\end{aligned}$$

En multipliant ces deux lignes, une simplification mène à

$$\begin{aligned}\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big) &= \sin\big(\tfrac{x}{2}\big)\cos\big(\tfrac{x}{2}\big)+\sin\big(\tfrac{y}{2}\big)\cos\big(\tfrac{y}{2}\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin(x)+\tfrac{1}{2}\sin(y)\,.\end{aligned}$$

□

2.5 Fonctions trigonométriques réciproques

On définit ici les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. On verra **ici** (lien vers la section `m_derivee_fonction_reciproque`) comment calculer les dérivées de ces fonctions réciproques.

2.5.1 Réciproque du sinus : arcsinus

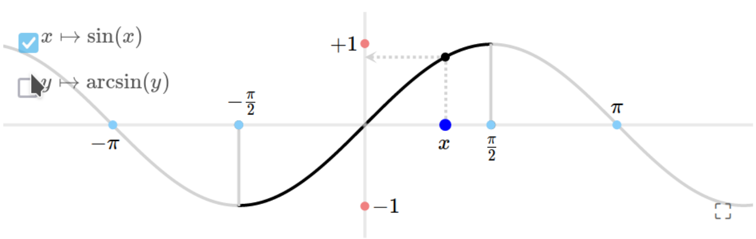
La fonction sinus, vue comme définie sur tout $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin : \mathbb{R} &\to [-1,1]\\ x &\mapsto \sin(x)\,,\end{aligned}$$

est surjective mais pas injective puisque périodique. On peut la rendre injective en restreignant son domaine. La restriction standard est de prendre $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin : [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] &\to [-1,1]\\ x &\mapsto \sin(x)\end{aligned}$$

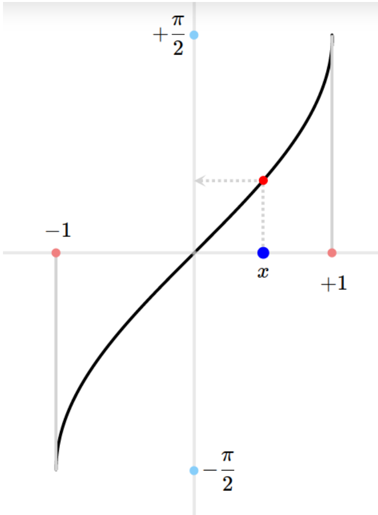
est bijective.



Sa réciproque s'appelle l'**arcsinus** :

$$\begin{aligned}\arcsin : [-1,1] &\to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\\ y &\mapsto \arcsin(y)\end{aligned}$$

Comme on sait, son graphe est celui du sinus, réfléchi à travers la diagonale du premier quadrant :



Par définition,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(x)) &= x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\,, \\ \sin(\arcsin(x)) &= x \qquad \forall x \in [-1, 1]\,. \end{aligned}$$

2.5.2 Réciproque du cosinus

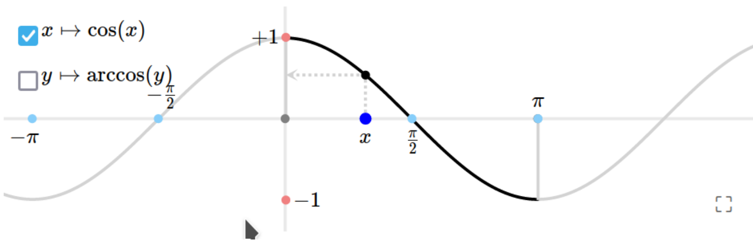
La fonction cosinus, vue comme définie sur tout $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x)\,, \end{aligned}$$

est surjective mais pas injective puisque périodique. On peut la rendre injective en restreignant son domaine. La restriction standard est de prendre $[0, \pi]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

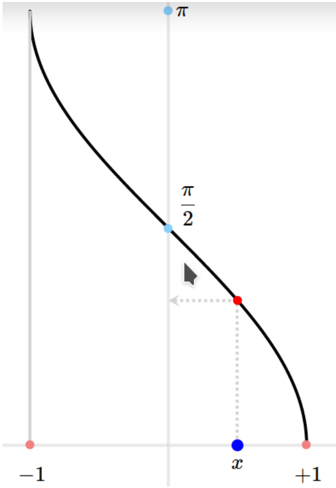
est bijective.



Sa réciproque s'appelle l'**arccosinus** :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ y &\mapsto \arccos(y) \end{aligned}$$

Comme on sait, son graphe est celui du cosinus, réfléchi à travers la diagonale du premier quadrant :



Par définition,

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(x)) &= x \qquad \forall x \in [0, \pi]\,, \\ \cos(\arccos(x)) &= x \qquad \forall x \in [-1, 1]\,. \end{aligned}$$

2.5.3 Réciproque de la tangente

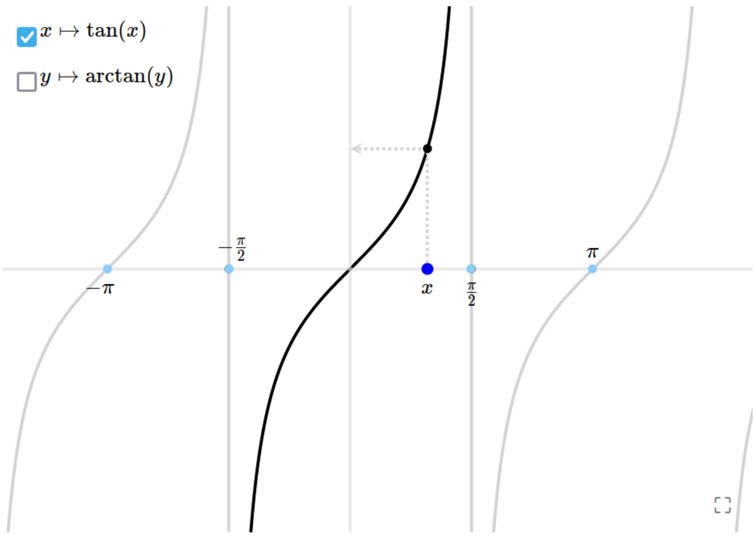
La fonction tangente

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x)\,, \end{aligned}$$

est surjective mais pas injective puisque périodique. On peut la rendre injective en restreignant son domaine. La restriction standard est de prendre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

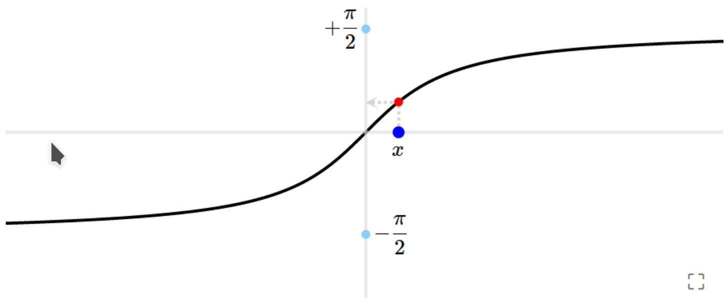
est bijective.



Sa réciproque s'appelle l'**arctangente** :

$$\begin{aligned}\arctan : \mathbb{R} &\to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ y &\mapsto \arctan(y)\end{aligned}$$

Comme on sait, son graphe est celui de la tangente, réfléchi à travers la diagonale du premier quadrant :



Par définition,

$$\begin{aligned}\arctan(\tan(x)) &= x \qquad \forall x \in]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\,,\\ \tan(\arctan(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2.6 Exponentielles et logarithmes

N'ayons pas peur des mots : *les exponentielles et les logarithmes sont les fonctions les plus importantes des mathématiques*.

Or pour les définir précisément, comme fonctions d'une variable réelle x, on doit d'une façon ou d'une autre passer par l'utilisation de la notion de *limite*. Ceci fait qu'on ne peut en principe pas les utiliser avant des étapes plus avancées du cours.

Pourtant, leur importance fait qu'on est habitué à les manipuler depuis l'école, bien avant l'université. Donc dans ce cours, le choix a été fait de les utiliser depuis le début, dans de nombreux exemples.

Donc nous allons ici nous contenter de rappeler les propriétés qui caractérisent les exponentielles et les logarithmes. Plus tard, nous reviendrons sur leur construction rigoureuse. (Voir **ici** (lien vers la section `m_fonctions_EXPLOG`) et **ici** (lien vers la section `m_fonctions_LOGEXP`).)

2.6.1 Exponentielle de base a

Fixons un nombre $a > 0$, différent de 1, que l'on appelle **base**.

Si $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, on définit

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

Cette notation compacte pour un produit a la propriété fondamentale suivante : pour toute paire $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^{m+n} = a^m a^n\,.$$

Cette propriété peut être utilisée comme fil conducteur pour étendre progressivement la fonction $n \mapsto a^n$ à des valeurs de n plus générales.

Pour commencer, voyons comment doit être défini "a^0" si on impose que la propriété soit vérifiée aussi pour $n = 0$. On peut alors écrire

$$a = a^1 = a^{0+1} = a^0 a^1 = a^0 a\,,$$

et comme $a > 0$, on en déduit que

$$a^0 = 1\,.$$

Si on souhaite ensuite définir "a^n" pour des entiers négatifs, en imposant encore que la propriété soit vérifiée, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

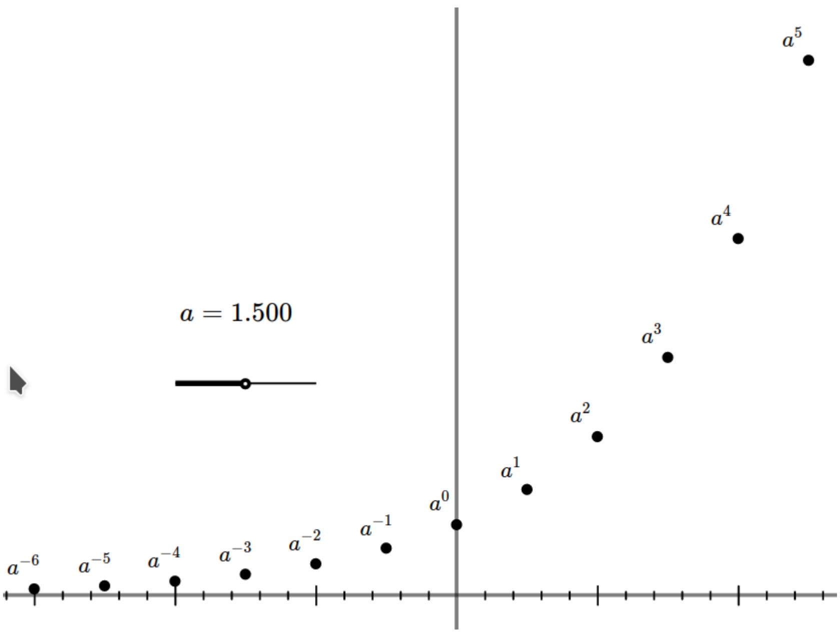
$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n a^{-n}\,,$$

d'où on tire

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.$$

On a maintenant une fonction,

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R}_+^* \\ n &\mapsto \exp_a(n) = a^n\end{aligned}$$



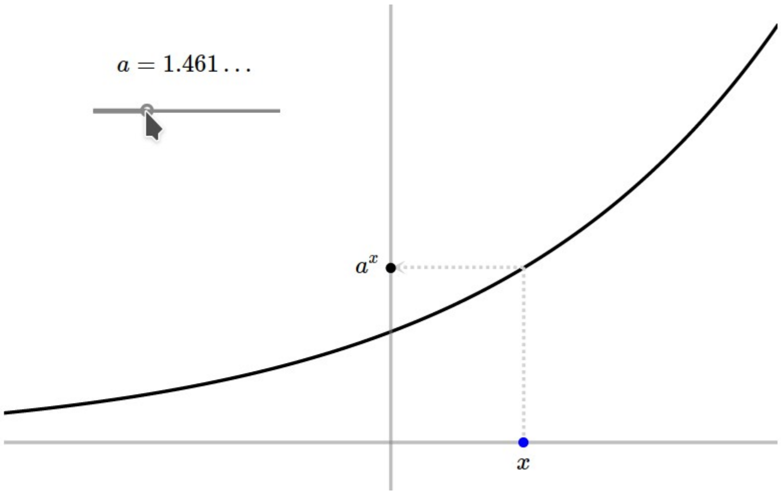
La fonction **exponentielle de base** a est une généralisation de cette notion, où l'entier n peut être remplacée par un réel x quelconque :

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a(x)\,,\end{aligned}$$

que l'on note souvent "a^x" au lieu de "$\exp_a(x)$". Cette généralisation est faite de façon à ce que la propriété fondamentale soit préservée :

$$a^{x+y} = a^x a^y\,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

De plus, cette fonction est bijective :



Remarquons que a^x est croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

2.6.2 Logarithme de base a

Étant bijective, la fonction exponentielle de base a possède une réciproque, appelée **logarithme de base** a :

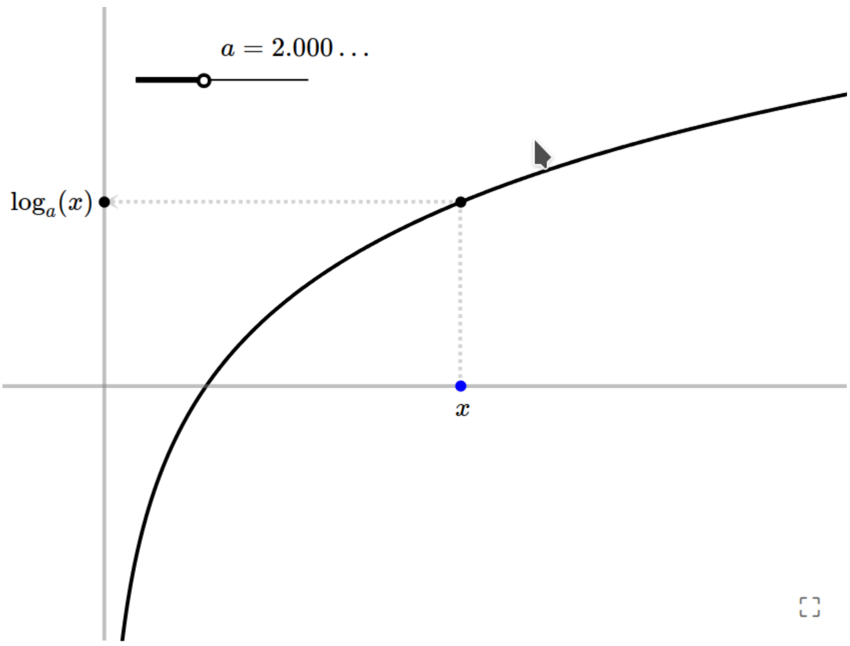
$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x) \,. \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \log_a(\exp_a(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ \exp_a(\log_a(y)) &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^*\,. \end{aligned}$$

Sa propriété fondamentale est la suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,.$$



Remarquons que $\log_a(1) = 0$, et que $\log_a$ est croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

2.6.3 Changement de base

Si on connaît $\log_b(x)$, comment calculer $\log_a(x)$?

Nommons ces nombres :

- ⋆ $y_1 = \log_a(x)$, qui est équivalent à $x = a^{y_1}$
- ⋆ $y_2 = \log_b(x)$, qui est équivalent à $x = b^{y_2}$

On a alors

$$a^{y_1} = b^{y_2}\,,$$

et en prenant $\log_b(\cdot)$ des deux côtés,

$$y_2 = y_1 \log_b(a)\,.$$

On a donc **la formule de changement de base** :

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}\,.$$

Cette formule fait qu'il suffit en général de choisir une base et de travailler avec ; les logarithmes dans d'autres bases peuvent être obtenus à l'aide de cette formule.

2.6.4 La base e

Il existe une base pour laquelle les fonctions exponentielles et logarithme possèdent des propriétés supplémentaires, qui les rendent plus faciles à manipuler. La base en question est notée "e", où

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977\ldots$$

Pour nous, ce nombre sera défini par la limite suivante (nous y reviendrons **ici** (lien vers la section `m_suites_serie_geometrique`)) :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Les exponentielles et logarithmes dans la base e sont généralement notés comme suit :

$$\exp_e(x) \equiv \exp(x) = e^x\,,$$
$$\log_e(x) \equiv \log(x)\,.$$

Le logarithme $\log(x)$ est appelé **logarithme naturel** (ou **népérien**). On trouve souvent la notation "$\ln(x)$", que nous n'utiliserons pas ici.

Pour plus de détails historiques consulter l'article **Histoire des logarithmes et des exponentielles (Wikipedia)** (lien web).

2.7 Preuves par récurrence

La méthode de *preuve par récurrence* (appelée aussi *preuve par induction*) est une technique de démonstration qui, quand elle s'applique, permet de démontrer une infinité d'affirmations en seulement deux étapes.

(ici, Video: `v_recurrence_NEW.mp4`)

Supposons que l'on définisse, pour chaque entier $n \geqslant 1$, une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$. Pour chaque n, $\mathcal{P}(n)$ est soit vraie, soit fausse.

Exemple 2.27. Soit $\mathcal{P}(n) =$"le nombre entier n est divisible par 2". Alors $\mathcal{P}(1)$ est fausse, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(3)$ est fausse, etc. Donc on peut tout de suite résoudre tous les cas : $\mathcal{P}(n)$ est vraie si n est pair, fausse si n est impair. $\diamond$

En mathématiques, on a souvent besoin de montrer qu'une infinité de propriétés sont vraies simultanément : $\mathcal{P}(1)$ est vraie, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(3)$ est vraie, etc.

Si ces propriétés $\mathcal{P}(n)$ n'ont rien à voir les unes avec les autres, on n'a d'autre alternative que de les vérifier les unes après les autres.

Exemple 2.28. Supposons qu'un certain univers contienne une infinité de galaxies. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "il existe, dans cet univers, une galaxie dans laquelle on peut trouver exactement n planètes sur lesquelles on trouve de la vie".

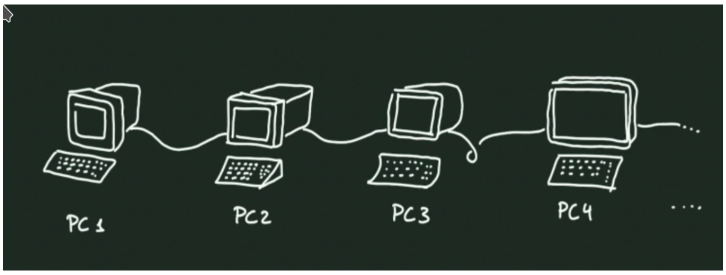
Si on fixe un n et qu'on se pose la question de savoir si $\mathcal{P}(n)$ est vraie ou fausse, on n'a qu'un seul moyen d'obtenir la réponse : parcourir tout l'univers jusqu'à trouver une galaxie contenant exactement n planètes sur lesquelles on trouve la vie. $\diamond$

Si on a de la chance, on peut espérer étudier la véracité de ces propriétés $\mathcal{P}(n)$ en profitant de certaines relations pouvant exister entre elles, pour des n différents.

Dans le cas de la récurrence, on s'intéresse à une relation entre les paires d'entiers consécutifs, n et $n+1$, et la relation considérée est la suivante : *si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi*.

Exemple 2.29. Dans l'exemple du dessus (galaxies), il n'y a aucune *corrélation* du genre entre les propriétés $\mathcal{P}(n)$ pour des n différents, puisque savoir que $\mathcal{P}(n)$ est vraie n'implique pas forcément que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie aussi. $\diamond$

Exemple 2.30. Supposons que l'on ait devant nous une très longue table sur laquelle sont posés une infinité d'ordinateurs, numérotés $1, 2, 3, \ldots$. On découvre avec effroi que sur chacun de ces ordinateurs est installé un système opérationnel propriétaire, issu d'une grande compagnie.



On suppose que ces ordinateurs sont tous allumés, et que pour tout n, le n-ème ordinateur envoie constamment des données non-cryptées vers son voisin $n+1$. Dans ce cas, il est absolument certain que si l'ordinateur n est infecté par un virus, alors l'ordinateur $n+1$ est infecté aussi. En d'autres termes, si on définit la propriété $\mathcal{P}(n) =$"le $n$ème ordinateur est infecté par un virus", on sait que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi.

Ceci a la conséquence suivante : si *un seul* de ces ordinateurs est infecté, alors tous les suivants le sont aussi. En particulier, si le premier est infecté, alors tous sont infectés. $\diamond$

La méthode de *démonstration par récurrence* consiste à donner une démonstration dans laquelle on utilise une structure semblable à celle de ce dernier exemple. On la résume comme suit :

Montrer **par récurrence** qu'une infinité de propriétés $\mathcal{P}(n)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont vraies, cela consiste

1) à vérifier que la première propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie, (c'est l'**initialisation**), puis

2) à vérifier que quel que soit l'indice $n \geqslant 1$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors cela entraîne que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi (c'est le **pas d'induction**).

Si on peut effectivement vérifier ces deux étapes, alors 1. implique que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, mais alors 2. implique que $\mathcal{P}(2)$ est vraie aussi, mais alors 2. implique que $\mathcal{P}(3)$ est vraie aussi, etc. Par ce procédé, on démontre donc bien que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Informel 2.31. Pour que le pas d'induction ait une chance de fonctionner, il faut évidemment que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ puissent être mises en relation, quel que soit n ! Et là, la difficulté est de travailler avec un n quelconque, dont on ne spécifie pas la valeur ; dans les situations concrètes, ceci implique en général un calcul *littéral*, dans lequel on manipule ce n inconnu.

Exemple 2.32. Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Commençons par nommer les deux membres de l'identité ci-dessus, en posant

$$a_n := 1+2+3+4+\cdots+n\,, \qquad \text{et} \qquad b_n := \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Pour un n spécifique pas trop grand, on peut toujours le vérifier en calculant la valeur de a_n, puis celle de b_n, puis de voir si elles sont égales. Par exemple,

- ⋆ pour $n = 1$, on a $a_1 = 1$ et $b_1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$, et donc $a_1 = b_1$
- ⋆ pour $n = 2$, on a $a_2 = 1+2 = 3$ et $b_2 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$, et donc $a_2 = b_2$.

On voit donc que $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$.

On pourrait continuer à vérifier la relation "$a_n = b_n$" pour des n toujours plus grands, en calculant séparément les nombres a_n et b_n "à la main", et en vérifiant qu'ils sont effectivement égaux. Mais ceci n'exclut pas qu'il existe un n, éventuellement très grand, pour lequel $a_n \neq b_n$!

Définissons donc, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ comme étant : "pour l'entier n, on a $a_n = b_n$". Montrons, par récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

1) Initialisation : on a déjà vérifié plus haut, "à la main", que $a_1 = b_1$, et donc on sait que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2) Pas d'induction : supposons que pour un n donné (dont on n'a pas besoin de spécifier la valeur), $\mathcal{P}(n)$ est vraie , c'est-à-dire que l'on a effectivement

$$a_n = b_n\,.$$

Pour montrer que ceci entraîne que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, on va faire un calcul, à l'issue duquel on obtiendra que $a_{n+1} = b_{n+1}$. Or la structure du problème fait que a_{n+1} peut être relié à a_n. En effet,

$$a_{n+1} = 1+2+3+4+\cdots+n+(n+1) = a_n + (n+1)\,.$$

Mais, puisque l'on est en train de supposer que $a_n = b_n$, on peut l'utiliser et faire un peu d'arithmétique :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,. \end{aligned}$$

Mais puisque
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = b_{n+1}\,,$$
on a bien montré que $a_{n+1} = b_{n+1}$. Ceci montre que *si* $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi.

On a donc bien montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. ◇

Remarque 2.33. En utilisant la même technique, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

En fait il existe des formules semblables pour toute somme du type

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k\,,$$

où $k \geqslant 1$ est un entier. Voir **ici (Mathologer)** (lien web) pour plus d'informations. ◇

Exemple 2.34. Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 10^n - 1$, et considérons l'affirmation $\mathcal{P}(n)$ définie par "a_n est un multiple de 9".

1) Pour $n = 1$, on a $a_1 = 10^1 - 1 = 9$, qui est un multiple de 9.
2) Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que a_n est un multiple de 9. Ceci s'exprime en disant qu'il existe un entier k tel que $a_n = 9k$. Remarquons alors qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 10^{n+1} - 1 &= 10 \cdot 10^n - 1 \\ &= 10(a_n + 1) - 1 \\ &= 10(9k+1) - 1 = 9(\underbrace{10k+1}_{=:k'})\,. \end{aligned}$$

Or puisque k est un entier, $k' = 10k + 1$ est aussi un entier. Donc $a_{n+1} = 9k'$: a_{n+1} est aussi un multiple de 9, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. ◇

2.7.1 La formule du binôme de Newton

Rappelons la définition des **coefficients binômiaux**. Pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En combinatoire, $\binom{n}{k}$ compte le nombre de façons d'arranger k objets indistingables dans n boîtes (un objet par boîte).

Lemme 4. *(formule du binôme de Newton) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\,.$$

Preuve: (Voir la vidéo) □

Voir aussi la vidéo de **Michael Penn** (lien web).