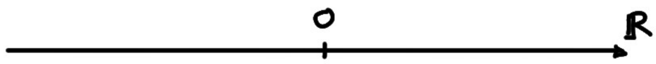
Chapitre 1

Nombres : $\mathbb{R}$

1.1 Introduction

On se représente souvent l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, comme tous les points d'une droite :

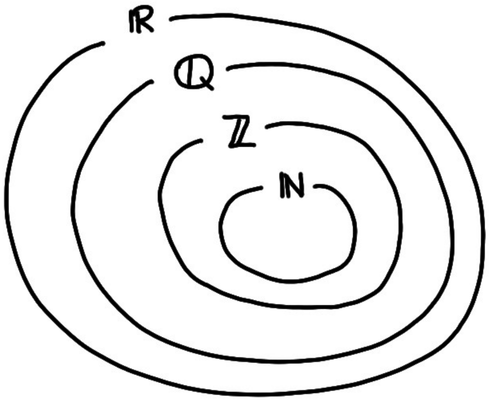


Même si cette image est utile pour l'intuition (en particulier pour se représenter des distances ou comparer des grandeurs), elle ne constitue évidemment pas une définition rigoureuse. En particulier, elle n'exprime pas le fait que les réels se prêtent bien au *calcul*, à savoir à la manipulation abstraite de quantités, qu'elles soient positives ou négatives, petites ou grandes.

De plus, les concepts fondamentaux de l'analyse (limite, continuité, dérivabilité, intégrabilité) se définissent précisément à l'aide de quelques notions simples qui utilisent toute la structure des réels.

Donc avant de commencer à présenter l'analyse à proprement parler, on se doit de définir quelles sont exactement les propriétés qui caractérisent $\mathbb{R}$. On listera en particulier les règles de calcul qui donneront aux réels la structure de ce qu'on appelle un *corps*.

1.1.1 Nombres et mesures



La construction des nombres commence, en général, avec l'introduction des **nombres naturels/entiers**, avec lesquels on peut déjà *compter* ("un mouton, deux moutons, trois moutons, ...") :

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} .$$

Puis viennent s'ajouter les **entiers relatifs**, obtenus à partir de $\mathbb{N}$ en rajoutant toutes les quantités entières négatives ("il fait froid : -15 degrés!", ou "$3-7=-4$") :

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}\,.$$

L'étape suivante est de considérer en plus toutes les proportions possibles entre deux grandeurs entières ("un demi litre de lait", "une heure et quart", "deux tiers des étudiants",...), pour obtenir les **nombres rationnels** :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}\,, q \neq 0 \right\}.$$

Les rationnels contiennent $\mathbb{Z}$ (prendre $q = 1$), donc ils contiennent des nombres arbitrairement grands, et peuvent être utilisés pour décrire des grandeurs astronomiques. Mais ils contiennent aussi des quotients aussi petits que l'on veut ($\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, etc.), et peuvent donc être utilisés pour décrire des grandeurs atomiques ou subatomiques.

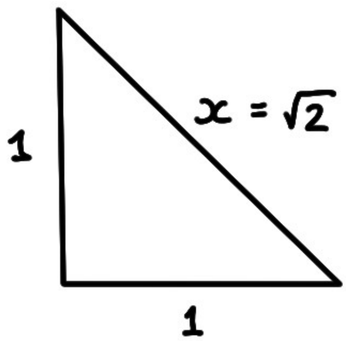
Pourquoi, alors, ne pas se contenter de garder $\mathbb{Q}$ pour faire de l'analyse ?

Même s'il permet a priori de mesurer des grandeurs à toutes les échelles possibles nécessaires de l'univers, $\mathbb{Q}$ souffre d'un défaut majeur : *il ne permet pas de tout mesurer* ! En effet, beaucoup de grandeurs physiques sont des quantités *irrationnelles*.

Voyons deux exemples.

1.1.2 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

L'école Pythagoricienne (env. 500BC) avait observé le fait suivant. Considérons un triangle rectangle dont les deux cathètes ont longueur 1 :



La longueur de l'hypothénuse est donnée par la solution $x > 0$ de l'équation

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2\,.$$

Lemme 5. *Le nombre x, solution de l'équation $x^2 = 2$, est irrationnel.*

Preuve: On démontre l'affirmation par l'absurde.

Supposons que $x \in \mathbb{Q}$, à savoir qu'il existe des entiers p et q tels x peut s'écrire $x = \frac{p}{q}$. On peut en fait supposer que p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun diviseur commun (s'ils ont un diviseur commun, on peut toujours simplifier la fraction).

Mais si $x = \frac{p}{q}$, alors $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p^2 est pair (un multiple de 2), et donc que p est pair aussi (exercice!). On peut alors écrire p sous la forme $p = 2e$, où e est un entier. Ceci implique également que $q^2 = \frac{p^2}{2} = 2e^2$, et donc q, par le même argument qu'avant, est aussi pair. Ceci implique que p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui représente une contradiction, puisqu'on a supposé que p et q n'avaient aucun diviseur commun. $\square$

Étant irrationnel, l'expansion décimale $\sqrt{2}$ n'a pas de "fin", et ne présente aucun motif particulier (pas de périodicité, etc.) :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242O9\ldots$$

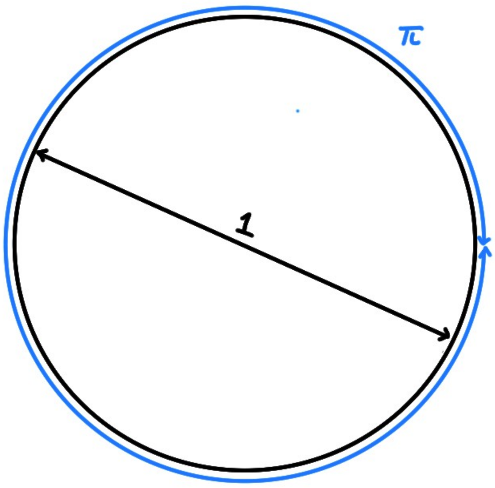
De nos jours, on connaît plus de **dix mille milliards de décimales** (lien web) de cette expansion.

"On sait que les nombres de ce genre (en parlant de $\sqrt{2}$) ont tourmenté Pythagore et son école presque jusqu'à puisement. Étant accoutumés à des nombres si étranges depuis notre première enfance, nous devons prendre garde à ne pas sous-estimer l'intuition mathématique de ces anciens sages. Leur tourment était hautement honorable. Ils se rendaient compte qu'on ne peut trouver aucune fraction dont le carré soit exactement égal à 2. On peut en donner des approximations très approchées, comme par exemple $\frac{17}{12}$, dont le carré, $\frac{289}{144}$, est très proche de $\frac{288}{144}$, c'est à dire de 2. On peut s'approcher encore plus près de 2 en considérant des fractions constituées au moyen de nombres plus grands que 17 et 12, mais on n'atteindra jamais **exactement** 2. "

E. Schrödinger, *Physique quantique et représentation du monde*

1.1.3 Irrationnalité de π

Le nombre π est défini comme la longueur de la circonférence d'un disque dont le diamètre est égal à 1 :



Il est surprenant d'apprendre que le développement décimal de ce nombre ne présente pas de régularité apparente :

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\ldots$$

On peut facilement trouver des rationnels qui approximent π à un niveau essentiellement arbitraire de précision (les décimales en rouge indiquent à partir d'où le rationnel cesse de donner une bonne approximation) :

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} &= 3.14285714286\ldots \\ \frac{333}{106} &= 3.14150943396\ldots \\ \frac{103993}{33102} &= 3.1415926530 1\ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Pourtant, Johann Heinrich Lambert a montré en 1761 que π est **irrationnel** : *il n'existe aucune paire* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *telle que*

$$\pi = \frac{p}{q}\,.$$

Pour une preuve relativement courte, mais qui requiert beaucoup des notions d'analyse présentées dans ce cours, voir **cette vidéo** (lien web), ou encore **celle-ci** (lien web) (les deux présentent la même preuve de l'irrationnalité de π, due à Niven).

1.1.4 Sur la construction de $\mathbb{R}$

La circonférence du disque et l'hypothénuse du triangle ci-dessus sont loin d'être les seuls irrationnels, donc cette discussion montre que même si $\mathbb{Q}$ constitue un ensemble de nombres allant des échelles subatomiques à superastronomiques, il ne contient pas tous les nombres nécessaires pour faire de la géométrie élémentaire : les irrationnels sont nécessaires. (Et en fait, dans un sens que nous ne détaillerons pas ici, il y a beaucoup plus d'irrationnels qu'il n'y a de rationnels...)

Il y a donc, dans la construction d'un bon ensemble de nombres permettant de faire de l'analyse, une étape finale, qui consiste à *compléter* $\mathbb{Q}$ en lui ajoutant tous les irrationnels pour obtenir $\mathbb{R}$. Cette construction est délicate, et nous ne la décrirons pas en détails car elle sortirait du cadre de ce cours.

Mais ce que nous ferons, dans les sections suivantes, sera de définir $\mathbb{R}$ en listant ses propriétés.

Nous dirons d'abord que c'est, comme $\mathbb{Q}$, un ensemble dans lequel on peut faire de l'arithmétique, c'est à dire des calculs à l'aide d'opérations telles que addition et multiplication.

Puis nous exigerons de $\mathbb{R}$ une propriété additionnelle, naturelle mais délicate à formuler (voir *supremum et infimum* plus loin), qui le distinguera radicalement de $\mathbb{Q}$, et qui nous permettra de commencer à construire l'analyse. (En passant, nous montrerons que dans $\mathbb{R}$, l'existence de $\sqrt{2}$ est bien garantie.)

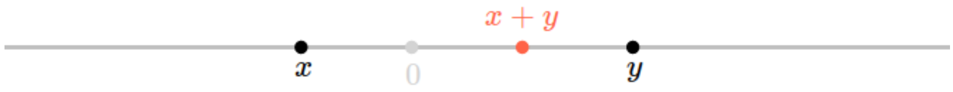
Ce que nous ne ferons pas, c'est de montrer qu'on peut effectivement *construire* un ensemble $\mathbb{R}$ jouissant de toutes ces propriétés. Pour plus de détails sur la construction des réels, je renvoie le lecteur aux livres d'analyse plus avancés. Par exemple : **Les nombres irrationnels (Voyage au pays des maths ARTE)** (lien web). Plus élémentaire : **Pour aller dans l'espace, de combien de décimales de π a-t-on vraiment besoin ?** (lien web)

1.2 Règles de calcul : $+, -, \cdot, \div$

Les nombres réels forment avant tout un ensemble dans lequel on peut faire de l'*arithmétique*, c'est-à-dire dans lequel on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser. (En mathématiques, un ensemble muni de ces opérations est appelé un **corps**.)

La première opération, l'**addition** notée "$+$", est une opération qui associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x + y$. Cette opération satisfait aux propriétés suivantes :

1) $x + y = y + x$ pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$
3) Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour l'addition** (ou simplement "**zéro**"), tel que $x + 0 = 0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique élément noté $-x \in \mathbb{R}$ et appelé **opposé de** x, tel que $x + (-x) = 0$.



Si $x, y \in \mathbb{R}$, on peut définir leur **soustraction** :

$$x - y := x + (-y) .$$

La deuxième opération, la **multiplication**, notée "$\cdot$", associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x \cdot y$. Elle satisfait aux propriétés suivantes :

1) $x \cdot y = y \cdot x$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pour tout triplet $x, y, z \in \mathbb{R}$
3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,
4) Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour la multiplication** (ou simplement "**un**"), tel que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un unique élément noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$, appelé **inverse de** x, tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Souvent, on écrit xy au lieu de $x \cdot y$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ et si $y \neq 0$, on peut définir leur **division** :

$$x \div y := x \cdot y^{-1} .$$

En général, on écrit $\frac{x}{y}$ au lieu de $x \div y$.

Remarque 1.1. $\mathbb{Q}$ est aussi muni de ces opérations, et les mêmes propriétés sont satisfaites. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$ (dans lequel, par exemple, 3 n'a pas d'opposé), ni de $\mathbb{Z}$ (dans lequel, par exemple, 2 n'a pas d'inverse). ◇

1.3 Ordre : $\leqslant, \geqslant, <, >$

La deuxième caractéristique de l'ensemble des nombres réels est que deux réels x, y peuvent toujours être *comparés*. Si ils sont égaux, $x = y$, il n'y a pas lieu de les comparer, mais si ils sont distincts, $x \neq y$, alors il y en a nécessairement un qui est plus petit que l'autre :

- ⋆ Si x est **plus petit que** y, on note $x < y$.
- ⋆ Si x est **plus grand que** y, on note $x > y$.

Le fait que l'on puisse ainsi comparer n'importe quelle paire de réels distincts représente ce qu'on appelle un **ordre total** .

L'ordre total représente l'intuition que nous avons pour la position relative de deux points sur une droite. $x < y$: "x est à gauche de y", $x > y$: "x est à droite de y",

Lorsqu'on veut comparer deux réels sans forcément se préoccuper de savoir s'ils sont distincts :

- ⋆ Si x est **plus petit ou égal à** y, on note $x \leqslant y$.
- ⋆ Si x est **plus grand ou égal à** y, on note $x \geqslant y$.

Exemple 1.2. Toutes les inégalités ci-dessous sont vraies :

$$0 < \tfrac{1}{2} \leqslant 1\,, \qquad 1 \geqslant 1\,, \qquad 3 < \pi < 4 \leqslant 4.1\,.$$

Par contre, les suivantes sont fausses :

$$0 > 0\,, \qquad -1 < -2\,, \qquad 0.99999\cdots < 1\,.$$

◇

Énonçons les propriétés des relations "$\leqslant, \geqslant, <, >$" :

1) Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leqslant y$, soit $y \leqslant x$. Si on a à la fois $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
2) $x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
4) Si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
5) Si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant x \cdot y$

Informel 1.3. La troisième propriété est constamment utilisées en analyse. En effet, pour montrer qu'un nombre x est plus petit ou égal à un nombre z, on passera souvent par l'utilisation d'un réel intermédiaire y, et on vérifiera les deux relations "$x \leqslant y$", "$y \leqslant z$", qui ensemble garantissent que $x \leqslant z$.

1.3.1 Signe

Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit

- ⋆ **positif** (resp. **strictement positif**) si $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$),
- ⋆ **négatif** (resp. **strictement négatif**) si $x \leqslant 0$ (resp. $x < 0$).

1.4 Intervalles

Avant de compléter la définition de $\mathbb{R}$, utilisons les relations d'ordre, $\leqslant, <, >, \geqslant$, pour introduire certains sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles*.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On définit les **intervalles bornés** :

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}\,, \tag{1.1}$$
$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}\,, \tag{1.2}$$
$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}\,, \tag{1.3}$$
$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\}\,, \tag{1.4}$$

On dit que $]a,b[$ est **ouvert**, et que $[a,b]$ est **fermé**. (On reviendra plus loin sur les notions d'ensemble borné/ouvert/fermé, qui sont générales et ne s'appliquent pas uniquement aux intervalles.) Pour représenter ces intervalles graphiquement, on utilisera une boule pleine pour indiquer que l'extrémité de l'intervalle est inclue, et vide pour indiquer que l'extrémité est exclue. Donc on représente $[a,b[$ comme suit :

Ensuite, introduisons les **intervalles non-bornés** :

$$[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant a\}\,,$$
$$]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}\,,$$
$$]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant b\}\,,$$
$$]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}\,.$$

On définit en particulier les ensembles des réels **positifs** et **strictement positifs**,

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = [0,\infty[\,, \tag{1.5}$$
$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0,\infty[\,, \tag{1.6}$$

ainsi que les ensembles des réels **négatifs** et **strictement négatifs**,

$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\} =]-\infty,0]\,, \tag{1.7}$$
$$\mathbb{R}_-^* := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty,0[\,. \tag{1.8}$$

1.5 Valeur absolue et distance

Définition 1.4. La **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Exemple 1.5. $\star$ Puisque $\frac{7}{8} > 0$, on a $|\frac{7}{8}| = \frac{7}{8}$.

$\star$ Puisque $-3 < 0$, on a $|-3| = -(-3) = 3$.

$\diamond$

Les propriétés suivantes suivent de la définition : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

1) $|x| \geqslant 0$

2) $|-x| = |x|$
3) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
5) Si $a \geqslant 0$, alors $|x| \leqslant a$ si et seulement si $-a \leqslant x \leqslant +a$.
6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
7) Si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
8) Si on divise un réel non-nul x par sa valeur absolue, on obtient son **signe** :

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0\,, \\ -1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Proposition 2. *(Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|\,.$$

Preuve: Si $x + y \geqslant 0$, alors

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|\,.$$

Si $x + y < 0$, alors

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|\,.$$

□

L'inégalité triangulaire sera utilisée très souvent lorsqu'on aura besoin *d'estimer des sommes de réels*. Plus précisément, considérons la somme de deux nombres x et y, que l'on sait être "petits" dans le sens où on a trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \leqslant \varepsilon$ et $|y| \leqslant \varepsilon$. (Remarquons que ceci n'implique rien sur les *signes* des nombres x et y.) Alors, l'inégalité triangulaire permet de garantir que

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

et donc

$$-2\varepsilon \leqslant x + y \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Remarque 1.6. On peut utiliser la valeur absolue pour caractériser le nombre "zéro" : c'est l'unique nombre dont la valeur absolue est plus petite que tout nombre positif :

$$x = 0 \Longleftrightarrow |x| = 0 \Longleftrightarrow |x| \leqslant \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\,.$$

◇

1.5.1 Distance

La valeur absolue permet de mesurer la proximité de deux réels $x, y, \in \mathbb{R}$, en définissant leur **distance** :

$$\mathrm{dist}(x, y) := |x - y|\,.$$

Lemme 6. *(Propriétés de la distance)*

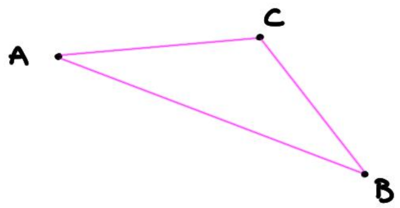
1) $\mathrm{dist}(x, y) \geqslant 0$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$. *De plus,* $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
2) $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$
3) *Pour tous* $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{dist}(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, z) + \mathrm{dist}(z, y)\,.$$

Preuve: Les deux premières affirmations suivent directement des propriétés de la valeur absolue. Pour la troisième, on insère $-z + z = 0$, et on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x,y) = |x-y| &= |(x-z)+(z-y)| \\ &\leqslant |x-z| + |z-y| \\ &= \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y)\,. \end{aligned}$$

Remarque : En géométrie Euclidienne, l'inégalité triangulaire dit que le chemin direct allant d'un point A à un point B est plus court que tout autre chemin (rectiligne) passant par un point intermédiaire C :

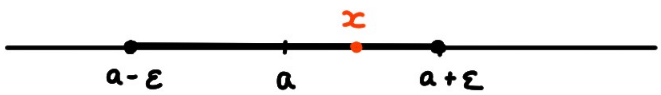


$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \mathrm{dist}(A,C) + \mathrm{dist}(C,B)\,.$$

□

On utilisera souvent les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x,a) \leqslant \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-a| \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \end{aligned}$$



1.6 Supremum et infimum

Ici, nous introduirons la propriété cruciale qui différencie les réels des rationnels. En particulier, nous verrons comment cette propriété permet de garantir que dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 2$ possède bel et bien une solution.

Avant de commencer, il nous faut introduire un peu de terminologie.

1.6.1 Minimum, maximum

L'ordre introduit plus haut sur $\mathbb{R}$ permet de distinguer certains éléments d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- ⋆ Un élément $x^* \in A$ est dit **maximal** si $x \leqslant x^*$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x^* est le **maximum** de A, et on note : $x^* = \max A$.
- ⋆ Un élément $x_* \in A$ est dit **minimal** si $x_* \leqslant x$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x_* est le **minimum** de A, et on note : $x_* = \min A$.

Exemple 1.8.

$$\begin{aligned} \max\{-1,-3,-5,2,1\} &= 2 \\ \min\{-1,-3,-5,2,1\} &= -3\,. \end{aligned}$$

◇

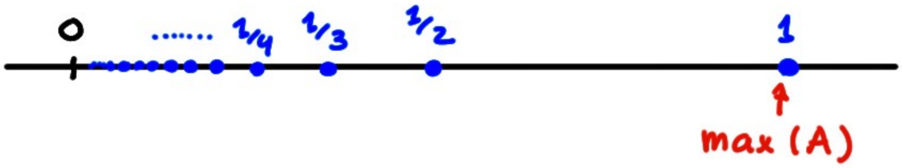
On réalise que quand un ensemble contient un nombre *fini* d'éléments, alors il possède toujours un minimum et un maximum. En d'autres termes, une liste finie de nombres contient toujours un plus grand et un plus petit élément. Par contre, lorsque l'ensemble possède un nombre *infini* d'éléments, l'existence d'un minimum ou maximum n'est plus garantie.

Exemple 1.9. Vu comme sous-ensemble des réels, l'ensemble des entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ possède un élément minimal, $\min \mathbb{N} = 0$, mais il ne possède pas d'élément maximal. ◇

Exemple 1.10. Considérons l'ensemble (la couleur, c'est juste pour voir l'ensemble sur le dessin du dessous) de tous les nombres de la forme $x = \frac{1}{n}$, où $n > 0$ est un entier :

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

Clairement, A possède un élément maximal : $x^* = \max A = 1$. En effet, $x \leqslant 1$ pour tout $x \in A$, et de plus $1 \in A$:



Par contre, A ne possède pas de minimum. En effet, aucun élément de A n'est plus petit que les autres. ◇

Exemple 1.11. Soit $B = [0, 1[$. D'abord, B possède un minimum, donné par $x_* = \min B = 0$. (En effet, $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et $0 \in B$.) Par contre, B n'a pas de maximum. En effet, pour tout $x \in B$, il existe toujours un autre élément $x' \in B$ tel que $x' > x$. On peut par exemple prendre $x' := \frac{x+1}{2}$, qui est le point milieu entre x et 1 :

Donc aucun élément de B n'est maximal. ◇

Exemple 1.12. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < 2\} \,.$$

Par définition, C est composé de tous les rationnels $x = \frac{p}{q}$, tels que $\frac{p}{q} < 1$. On a donc, par exemple, $\frac{2}{3} \in C$, $\frac{7}{6} \in C$, $\frac{199}{100} \in C$, etc.

C n'a pas de minimum puisque $-n \in C$ pour tout entier n, et C n'a pas de maximum non plus puisque pour tout $\frac{p}{q} \in C$, on a aussi $\frac{\frac{p}{q}+2}{2}$ ◇

1.6.2 Majorants, minorants

Définition 1.13. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1) A est **majoré** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel M **majore** A, ou que c'est un **majorant** pour A.
2) A est **minoré** si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel m **minore** A, ou que c'est un **minorant** pour A.
3) Si A est à la fois majoré et minoré, il est **borné**.

Exemple 1.14. $B = [0,1[$ est majoré ; $M = 1$, $M = 2$ sont des majorants. En fait, n'importe quel $M \geqslant 1$ majore B.

Par contre, $M = 0.9$ n'est *pas* un majorant ; en effet, si on prend par exemple le point $x = 0.95$, alors $x \in B$, et $x > M$. B est aussi minoré : n'importe quel réel $m \leqslant 0$ minore B.

◇

Informel 1.15. Un ensemble A est borné si et seulement si il peut être "rangé dans une boîte", c'est-à-dire placé à l'intérieur d'un intervalle $[m, M]$, où m et M sont des nombres finis.

Exemple 1.16. Vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$,

- ⋆ $\mathbb{N}$ est minoré puisque $0 \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contre $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. En effet, *pour tout* $M \in \mathbb{R}$, *il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > M$. Nous utiliserons ceci constamment par la suite.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré, ni majoré.

◇

1.6.3 Supremum, infimum

Passons maintenant à la notion essentielle de ce chapitre sur les réels :

Définition 1.17. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne supérieure** (ou **supremum**) de A si

1) s majore A (c.-à-d. que $x \leqslant s$ pour tout $x \in A$),
2) s est le plus petit majorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' < s$, il existe $x \in A$ tel que $x > s'$).

Si s est supremum de A, on le note $s = \sup A$.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne inférieure** (ou **infimum**) de A si

1) s minore A (c.-à-d. que $x \geqslant s$ pour tout $x \in A$),
2) s est le plus grand minorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' > s$, il existe $x \in A$ tel que $x < s'$).

Si s est l'infimum de A, on le note $s = \inf A$.

Remarque 1.18. Il est clair que

- ⋆ Si A possède un élément maximal, alors $\sup A = \max A$.
- ⋆ Si A possède un élément minimal, alors $\inf A = \min A$.

Mais en général, le maximum et le minimum peuvent ne pas exister, alors que le supremum et l'infimum comme on verra, existent toujours dans les réels. ◇

On reformulera souvent la deuxième condition, dans le supremum par exemple, en disant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x \in A$ tel que

$$s - \varepsilon \leqslant x \leqslant s\,.$$

Informel 1.19. (Interprétation "physique" de l'infimum et du supremum pour un ensemble borné.) On a dit qu'un ensemble A borné peut toujours être "rangé dans une boîte" $[m, M]$. Et bien parmi toutes les boîtes qui contienne A, la *plus petite* est celle pour laquelle $m = \inf A$ et $M = \sup A$.

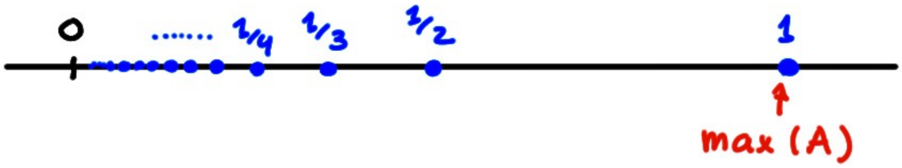
Exemple 1.20. Reprenons l'ensemble de tout à l'heure :

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \cdots \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots\right\}.$$

Puisque $1 \in A$ et que tout $x \in A$ est plus petit ou égal à 1, 1 est l'élément maximal de A, et $\sup A = \max A = 1$.

Vérifions maintenant que $\inf A = 0$. D'abord, 0 minore A puisque tout nombre de la forme $\frac{1}{n}$ est plus grand ou égal à 0. Pour montrer que 0 est le plus grand minorant, considérons un nombre quelconque $s' > 0$, et montrons que s' n'est pas un minorant pour A. En effet, si $s' > 0$, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n > \frac{1}{s'}$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{n} < s'$. Or comme $\frac{1}{n} \in A$, ceci montre que s' minore pas A.

On a donc bien montré que 0 est le plus grand minorant : $\inf A = 0$.



◇

Exemple 1.21. Soit encore $B = [0, 1[$. On a vu que B n'a pas de maximum ; montrons maintenant que $\sup B = 1$.

1) Premièrement, on a $x \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, donc B est majoré par 1.
2) Deuxièmement, si $s' < 1$, alors il existe $\tilde{x} \in B$ tel que $\tilde{x} > s'$. En effet, si $s' < 0$, n'importe quel $\tilde{x} \in B$ suffit. Sinon, si $0 \leqslant s' < 1$, on peut par exemple prendre $\tilde{x} := \frac{s'+1}{2}$.

Ensuite, on a $\inf B = 0$. En effet, 0 est le plus grand minorant :

1) $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et
2) pour tout $s' > 0$, il existe un $x \in B$ tel que $x < s'$

◇

1.6.4 La différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Passons à l'**axiome** qui confère à $\mathbb{R}$ une propriété qui permet de l'utiliser pour faire de l'analyse : Dans $\mathbb{R}$,

- ⋆ tout ensemble non-vide majoré possède un supremum,
- ⋆ tout ensemble non-vide minoré possède un infimum.

Pour des ensembles qui ne sont pas bornés, la convention suivante est parfois adoptée (ce n'est qu'une *notation*) :

- ⋆ Si A n'est pas majoré, $\sup A := +\infty$.
- ⋆ Si A n'est pas minoré, $\inf A := -\infty$.

Exemple 1.22. Calculons l'infimum/supremum de l'ensemble

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \ : \ \sin(x) > \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Remarquons pour commencer que

$$\sin(x) > \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Comme on veut $x \in \mathbb{R}_+$, on doit se restreindre à $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\\ &= \left]\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\tfrac{13\pi}{6}, \tfrac{17\pi}{6}\right[\cup \cdots \end{aligned}$$

On a donc $\inf B = \frac{\pi}{6}$, et comme cet ensemble n'est pas majoré, $\sup B = +\infty$. ◇

1.7 Solutions de $x^2 = 2$

Revenons à la question posée précédemment : si l'équation

$$x^2 = 2$$

ne possède pas de solution dans $\mathbb{Q}$, en possède-t-elle une dans $\mathbb{R}$?

Montrer qu'il existe effectivement un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$, "directement" est trop difficile. On fait donc un petit détour, en commençant par définir l'ensemble

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, x^2 < 2\}\,.$$

Remarquons que par exemple $0 \in A$, ou encore $1 \in A$, et donc A n'est pas vide.

Lemme 7. *A n'a pas d'élément maximal.*

Preuve: Il s'agit de montrer que pour tout élément $x \in A$, il existe toujours un $x' \in A$ qui est strictement plus grand que x.

Cherchons un x' de la forme $x' = x + \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas,

$$x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\,.$$

Puisque $n \geqslant 1$, on peut majorer : $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$x'^2 \leqslant x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n}\,.$$

Puisqu'on veut $x' \in A$, c'est-à-dire $x'^2 < 2$, imposons

$$x^2 + \frac{2x+1}{n} < 2\,,$$

qui est équivalente à

$$n > \frac{2x+1}{2-x^2}\,.$$

Le membre de droite est bien défini et positif puisque $2 - x^2 > 0$. Et un n satisfaisant à cette propriété existe toujours puisque, quelle que soit la valeur de $\frac{2x+1}{2-x^2}$, il existe toujours un n plus grand que ce nombre (ceci découle du fait que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré). Si on prend un tel n, on a donc $x' = x + \frac{1}{n} > x$, et

$$\begin{aligned} x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} \\ &= x^2 + \frac{2x+1}{n} \\ &< x^2 + \frac{2x+1}{\frac{2x+1}{2-x^2}} = 2\,. \end{aligned}$$

Ceci montre que A n'a pas d'élément maximal. □

Ensuite, remarquons que A est majoré : $x \leqslant 3$ pour tout $x \in A$. En effet, si $x > 3$, alors $x^2 > 9 > 2$, et donc $x \notin A$.

On peut maintenant considérer le réel défini comme le supremum de A :

$$s := \sup A\,.$$

Théorème 1.23. *Le nombre s défini ci-dessus satisfait $s^2 = 2$.*

Preuve: Si on avait $s \in A$, cela impliquerait que s est un élément maximal pour A. Comme on vient de voir que A ne possède pas d'élément maximal, on en déduit que $s \notin A$, et donc que

$$s^2 \geqslant 2\,.$$

Nous allons maintenant montrer que

$$s^2 \leqslant 2\,.$$

Pour ce faire, commençons par définir le réel

$$M := \frac{2+s^2}{2s}$$

et montrons que M majore A. En effet, observons que si $x > M$, alors

$$\begin{aligned} x^2 = (s + (x-s))^2 &= s^2 + 2s(x-s) + \underbrace{(x-s)^2}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant s^2 + 2s(x-s) \\ &> s^2 + 2s(M-s) \\ &= s^2 + 2s\big(\tfrac{2+s^2}{2s} - s\big) = 2\,, \end{aligned}$$

et donc $x \notin A$. Ceci implique que si $x \in A$, alors $x \leqslant M$; donc M majore A. Mais, comme s est par définition le plus petit majorant de A, on a que $s \leqslant M$, c'est-à-dire

$$s \leqslant \frac{2+s^2}{2s}\,,$$

qui est équivalente à $s^2 \leqslant 2$.

Comme s^2 est à la fois $\geqslant 2$ et $\leqslant 2$, ceci implique $s^2 = 2$. □

Le nombre s est appelé **racine carrée de deux** (lien web), et est noté

$$s = \sqrt{2}\,.$$

Puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ comme on a vu, $\sqrt{2}$ est par définition **irrationnel** .

1.7.1 La fonction "racine"

On peut, en utilisant la même idée que celle présentée dans la preuve de la section précédente, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^2 = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+$.

Cette analyse montre que la fonction

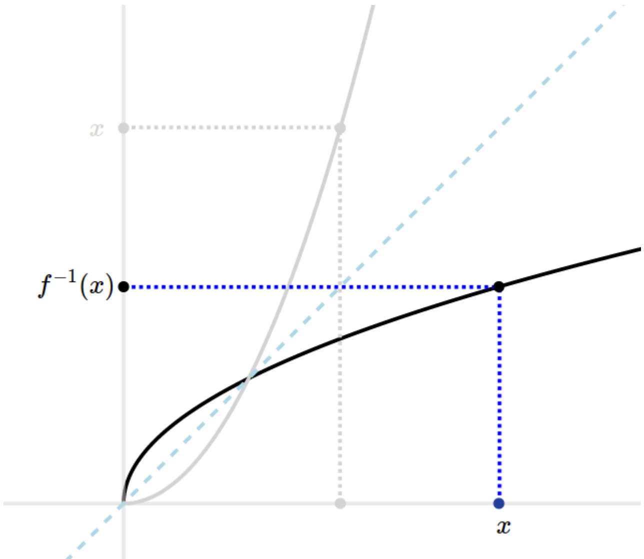
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

et une *surjection*. On montre **ici** (lien vers la section m_fonctions_generalites_fonctions_reelles) que c'est également une injection, et donc que cette fonction est une bijection.

Si $y \geqslant 0$, l'unique $x \geqslant 0$ tel que $x^2 = y$ se note $x = \sqrt{y}$, et se nomme **racine carrée de** y. Toute la fonction réciproque s'appelle la **fonction racine carrée** :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Comme on sait, son graphe s'obtient en réfléchissant celui de $f(x) = x^2$ à travers la diagonale du premier quadrant :



Remarque 1.24. La méthode se généralise, et permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^n = y$$

possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Celle-ci se note $\sqrt[n]{y}$ et se nomme **racine n-ème de** y. ◇

L'utilisation de la notion de supremum/infimum, pour construire la racine carrée ci-dessus, n'est évidemment qu'un exemple de ce que l'on peut faire dans les réels. Comme on verra dans la suite, l'utilisation de ces notions sera utilisée constamment, et fournira un socle sur lequel toute l'analyse réelle pourra être construite.

1.8 Densité dans $\mathbb{R}$

Intuitivement, même si les rationnels sont un sous-ensemble (strict) des réels, ils doivent quand-même être un peu "partout" sur la droite des réels, dans le sens où on doit pouvoir en trouver dans n'importe quelle région de la droite, aussi petite soit-elle. On caractérise ceci précisément à l'aide de la notion de *densité*.

Définition 1.25. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est **dense dans** $\mathbb{R}$ si pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe un $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Il est clair que $\mathbb{R}$ est dense dans lui-même, puisque pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on peut toujours considérer le point milieu $z := \frac{x+y}{2}$. Donc entre deux réels quelconques distincts, il y a toujours un autre réel.

Ce qui est plus intéressant, ce sont les ensembles denses dans $\mathbb{R}$ qui sont des sous-ensembles *stricts* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qui sont plus petits que $\mathbb{R}$.

Théorème 1.26. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Dans la preuve de ce théorème, nous utiliserons la notion suivante.

Définition 1.27. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **valeur entière de** x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$.

Exemple 1.28.

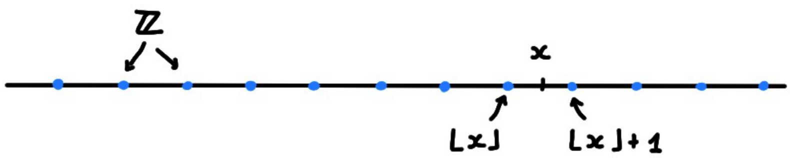
$$\lfloor \tfrac{5}{4} \rfloor = 1\,, \quad \lfloor -\tfrac{1}{3} \rfloor = -1\,, \quad \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2\,, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3\,.$$

◇

La définition de $\lfloor x \rfloor$ implique

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Donc l'image qu'il faut garder en tête est la suivante :



Cette dernière peut aussi s'écrire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Passons à la preuve du théorème.
Preuve: Soient deux réels $x < y$, et soit n un entier suffisamment grand, tel que $n > \frac{1}{y-x}$. On rappelle qu'un tel entier existe car $\mathbb{N}$ n'est pas borné. Posons maintenant

$$r := \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\,.$$

Comme c'est un quotient de deux entiers, r est rationnel. Et puisque

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx\,,$$

on a

$$\underbrace{\frac{(nx-1)+1}{n}}_{=x} < r \leqslant \underbrace{\frac{nx+1}{n}}_{=x+\frac{1}{n}<y}\,,$$

ce qui implique $x < r < y$. □

La conséquence principale de ce résultat est que l'on peut *approximer les réels par des rationnels*, dans le sens suivant :

Corollaire 4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| \leqslant \varepsilon$.*

Preuve: Posons $x' := x - \varepsilon$, $y' = x + \varepsilon$. Par le Théorème, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $x' < \frac{p}{q} < y'$, ce qui implique bien que $-\varepsilon \leqslant x - \frac{p}{q} \leqslant +\varepsilon$. □

En particulier, n'importe quel irrationnel peut être approximé par un rationnel, à un degré arbitraire de précision.

Exemple 1.29. Nous avons donné des approximations de π dans l'introduction. Dans le langage de la présente section, ces approximations s'expriment ainsi :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant 0.01$$
$$\left|\pi - \frac{333}{106}\right| \leqslant 0.0001$$
$$\left|\pi - \frac{103993}{33102}\right| \leqslant 0.000000001$$

Donc même si π est irrationnel, on sait maintenant qu'on peut fixer un $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, et le théorème garantit qu'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ à distance au plus ε de π :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

◇

Il se trouve que les irrationnels, eux aussi, permettent d'approximer n'importe quel réel :

Théorème 1.30. *L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: (exercice) □

On utilisera souvent les deux résultats ci-dessus, de la façon suivante : Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ (sous-entendu : aussi petit que l'on veut), il existe toujours un rationnel $r_* \in \mathbb{Q}$ et un irrationnel $i_* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que

$$r_* \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ , \quad i_* \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ .$$

1.9 Ensembles ouverts et fermés

La notion de "ouvert/fermé", introduite précédemment pour les intervalles, est en fait une notion plus générale, et s'applique à d'autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

Définition 1.31. Soit $G \subset \mathbb{R}$.

1) G est **ouvert** si pour tout $x \in G$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

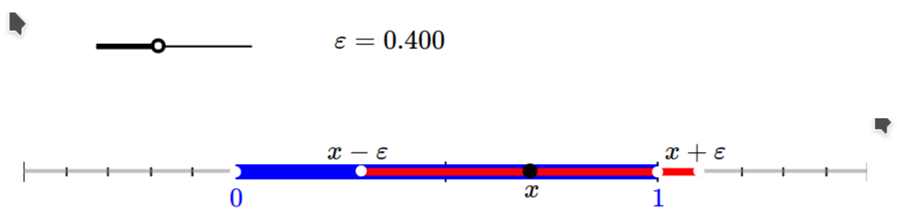
$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G\,,$$

c.-à-d. tel que $x' \in G$ pour tout $x' \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

2) G est **fermé** si son complémentaire (c.-à-d. $G^c := \mathbb{R} \setminus G$) est ouvert.

Un *intervalle ouvert* (au sens des sections précédentes) est effectivement *ouvert* au sens de la définition qui précède :

Exemple 1.32. Considérons $G =]0,1[$. Si on fixe un $x \in G$ quelconque, alors en prenant un nombre $\varepsilon > 0$ qui est à la fois plus petit que $|x|$ (distance de x à l'extrémité gauche de l'intervalle) et que $|x-1|$ (distance de x à l'extrémité droite de l'intervalle), alors l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est entièrement contenu dans G. Clairement, le choix du ε dépend de où se trouve x : plus x est proche du bord, plus ε doit être pris petit. L'essentiel est que pour tout $x \in G$, on trouve *toujours* un $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset G$. (Sur l'animation ci-dessous, on a épaissi un peu pour y voir quelque chose.) ◇



De la même façon, on montre que les intervalles de la forme $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont ouverts.

Exemple 1.33. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ est ouvert (voir exercices) ◇

Proposition 3. *Si un ensemble $G \subset \mathbb{R}$ est une union d'ensembles ouverts, alors il est ouvert.*

Preuve: On donne la preuve dans le cas où G est une union finie d'ouverts G_k :

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n \,.$$

Si $x \in G$, alors il existe au moins un indice k tel $x \in G_k$. Mais puisque G_k est ouvert, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset G_k$. Comme $G_k \subset G$, ceci implique $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset G$. □

Exemple 1.34. Considérons $G = [a,b]$. Cet ensemble n'est *pas* ouvert, puisque quel que soit la valeur de $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient des points qui ne sont pas dans G (utilisez l'animation ci-dessus pour l'apprécier !). De plus, puisque son complémentaire est

$$G^c = [a,b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\,,$$

qui est une union d'ouverts, G^c un ouvert. Donc G est fermé. ◇

Exemple 1.35.
- ⋆ Un ensemble contenant un seul point, $\{x\}$, est fermé. En effet, son complémentaire est $\{x\}^c =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, qui est ouvert.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ est fermé. En effet, son complémentaire est

  $$\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\,,$$

  et donc une union d'ouverts, donc c'est un ouvert.

◇

Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés.

Exemple 1.36. Si $a < b$, alors $I = [a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé. En effet,
- ⋆ I n'est pas ouvert, car si on prend $x = a$, alors il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.
- ⋆ I n'est pas fermé non plus, parce que son complémentaire est $I^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$, et si on prend cette fois $x' = b$, alors il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]x'-\varepsilon, x'+\varepsilon[\subset I^c$.

◇

Exemple 1.37. $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

- ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert. En effet, fixons un $r \in \mathbb{Q}$. On a dit plus haut que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, donc quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ contient toujours un irrationnel. Donc il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$.
- ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet, son complémentaire est l'ensemble de tous les irrationnels, et n'est pas ouvert non plus : puisque les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, pour tout irrationnel y, un intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ contient toujours un rationnel, quel que soit $\varepsilon > 0$.

◇