Chapitre 13

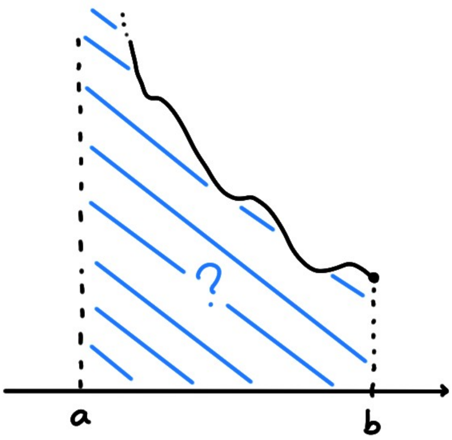
Intégrales généralisées

13.1 Introduction

Rappelons que l'intégrale a été définie pour des fonctions *bornées*, définies sur un intervalle $[a, b]$, fermé et borné. Dans ce cadre, la *continuité* s'est avérée une condition suffisante pour garantir l'intégrabilité.

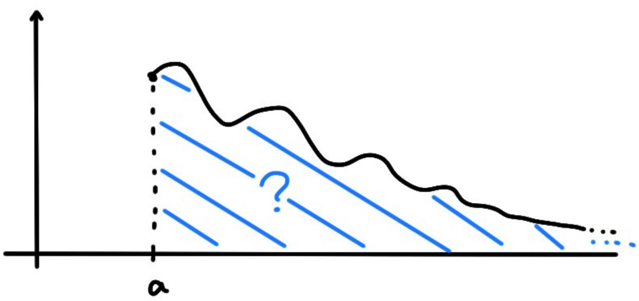
Dans cette section, nous allons étendre l'intégration à des fonctions définies sur des intervalles où elle n'est plus forcément bornée, par exemple sur un intervalle $]a, b]$, possédant une asymptote verticale,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty\,,$$



ou alors sur des intervalles non-bornés, du type $[a, +\infty[$, tendant vers zéro,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0\,.$$



Des intégrales de ce type sont *généralisées*, puisqu'elles n'entrent pas dans le cadre de l'intégrale de Riemann/Darboux présentée jusqu'ici.

Informel 13.1. Une autre appelation, pour les intégrales généralisées, est celle d'*intégrales impropres*.

13.2 Type I

En guise d'introduction, considérons le problème suivant : comment intégrer une fonction continue, mais définie sur un intervalle qui n'est *pas* fermé, par exemple de la forme $]a, b]$?

Supposons donc que $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, et que f est continue à gauche en b. Lorsque f possède une limite à droite en a, on peut la prolonger par continuité, et ensuite définir son intégrale au sens classique d'une fonction continue sur $[a, b]$.

Exemple 13.2. Considérons $f(x) = x\log(x)$ sur $]0, 1]$, qui est bien continue. Puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,,$$

On peut définir

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} x\log(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

et définir l'intégrale de f sur $]0, 1]$ comme l'intégrale de $\widetilde{f}$ sur $[0, 1]$. Puisque $\widetilde{f}$ est continue, cette intégrale est bien définie. Puisque

$$\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

on peut considérer

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 < x \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

qui est une primitive de $\widetilde{f}$ continue sur $[0, 1]$. Ainsi, par le Théorème Fondamental,

$$\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx = \widetilde{F}(1) - \widetilde{F}(0) = -\frac{1}{4}\,.$$

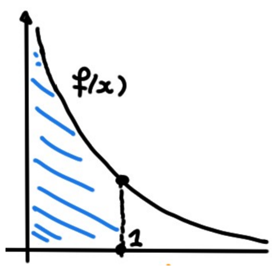
◇

Lorsque f n'a pas de limite lorsque $x \to a^+$, f ne peut pas être prolongée par continuité.

Exemple 13.3. Considérons $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

et essayons de calculer l'aire sous son graphe :



Le problème avec cette fonction est qu'elle n'est pas bornée, puisque

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

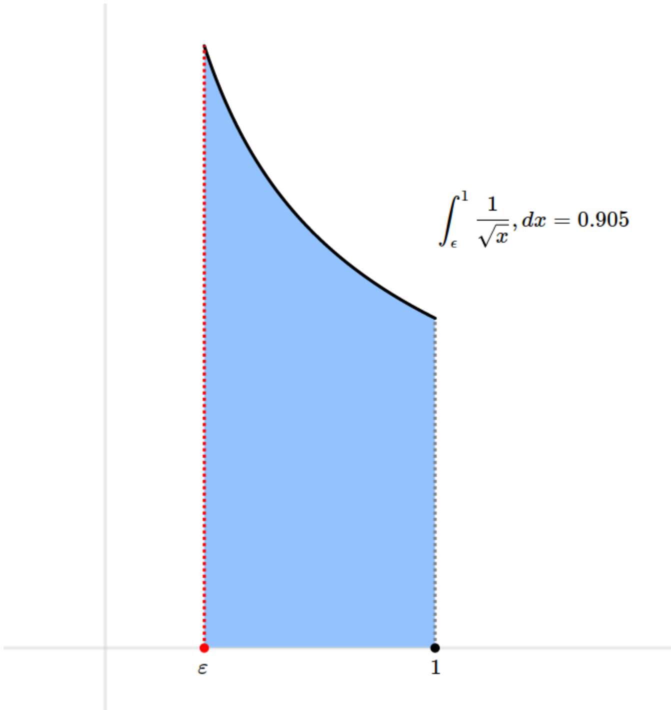
Par conséquent, il n'est même pas clair que l'aire sous son graphe soit bien définie. On ne peut pas mettre en place la méthode classique d'intégration au sens de Riemann/Darboux : la somme de Darboux supérieure a son premier rectangle qui est *toujours* de hauteur infinie ! Donc cette fonction ne peut pas s'intégrer de manière naïve, en sommant simplement des aires de rectangles, et on ne peut pas donner le sens classique au symbole "$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$".

L'idée, pour intégrer cette fonction, va être de traiter le problème en $x = 0$ en utilisant un processus de limite.

En effet, si on fixe un nombre quelconque $0 < \varepsilon < 1$, petit, on peut restreindre f à l'intervalle $[\varepsilon, 1]$. Comme $f : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ est continue (et par conséquent bornée), on peut l'intégrer de façon standard, et même utiliser le théorème fondamental :

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})\,.$$

Cette intégrale dépend de ε, mais elle se comporte bien lorsque ε s'approche de zéro (par la droite).



On peut en fait prendre la limite $\varepsilon \to 0^+$, pour donner un sens à l'intégrale de f sur $]0, 1]$, au sens d'une *limite* :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

$\diamond$

Informel 13.4. Ça peut paraître contre-intuitif : la région délimitée par le graphe de la fonction de ce dernier exemple n'est pas "limitée" : elle s'étend infiniment loin le long de l'axe des $y > 0$. Pourtant, *son aire est finie* : on pourrait la recouvrir entièrement à l'aide d'une quantité finie de peinture ! Ceci est dû au fait que lorsque $x \to 0^+$, $f(x)$ tend vers l'infini mais "pas trop vite".

Ce phénomène est semblable à celui rencontré dans l'étude des séries convergentes, où il est possible de sommer une infinité de nombres strictement positifs, et obtenir une somme totale finie.

L'idée utilisée dans ce dernier exemple peut se généraliser :

Définition 13.5. 1) Soit $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a < \alpha < b$, f soit continue sur $[\alpha, b]$. Si la limite

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de type I**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite est $\pm\infty$, ou si elle n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

2) Soit $f\colon\ [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a < \beta < b$, f soit continue sur $[a, \beta]$. Si la limite

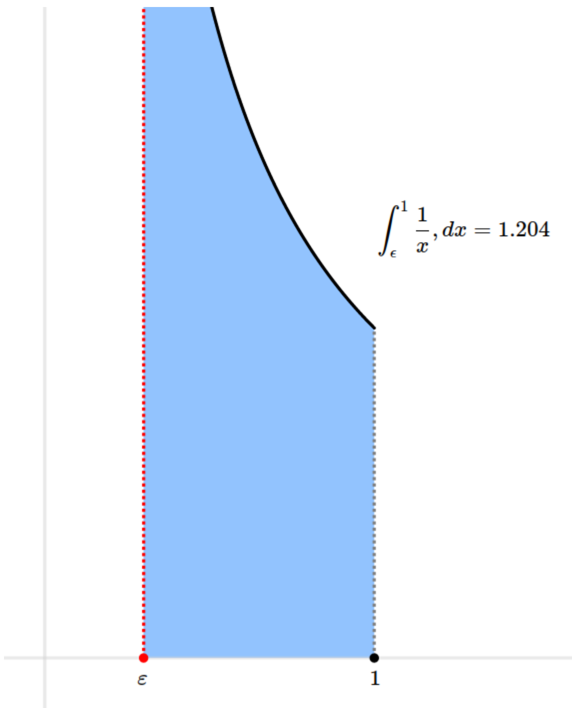
$$\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de type I**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite est $\pm\infty$, ou si elle n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

Exemple 13.6. Considérons l'intégrale généralisée de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1]$:

$$\begin{aligned}\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(x)\Big|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\log(\varepsilon)) \\ &= +\infty\,,\end{aligned}$$

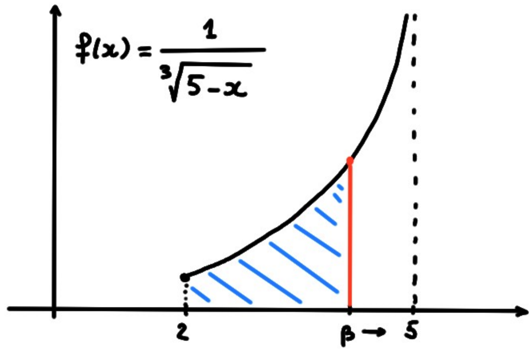
donc l'intégrale diverge. ⋄



Informel 13.7. Dans ce dernier exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0^+$, "trop vite" pour que son intégrale généralisée soit finie.

Exemple 13.8. L'intégrale généralisée de $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}$ sur $[2, 5[$ converge, car

$$\begin{aligned}\int_2^{5^-} \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}} &= \lim_{\beta\to 5^-} \int_2^{\beta} \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}} \\ &= \lim_{\beta\to 5^-} -\frac{3}{2}(5-x)^{2/3}\Big|_2^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to 5^-} \frac{3}{2}\Big\{3^{2/3} - (5-\beta)^{2/3}\Big\} \\ &= \frac{3^{5/3}}{2}\,.\end{aligned}$$



Remarquons que $\lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$. ◇

13.2.1 Un critère de comparaison

Dans beaucoup de situations pratiques, on doit déterminer si une intégrale généralisée de type I converge ou diverge, sans se préoccuper de connaître sa valeur (au cas où elle converge). Pour ça, on aimerait éviter de passer par la connaissance de la primitive de f, en utilisant une *comparaison*. On peut le faire si la fonction est de signe constant :

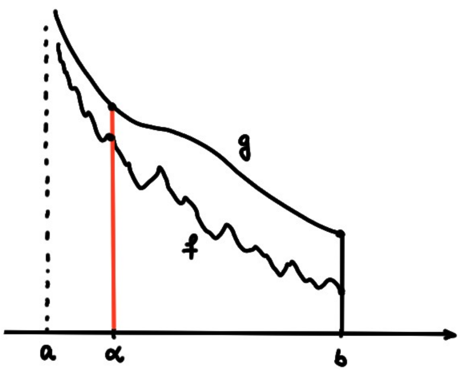
Proposition 16. *Soient* $f, g\colon\ ]a, b] \to \mathbb{R}$ *continues sur tout intervalle* $[\alpha, b]$, $a < \alpha < b$, *et telles que*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in\ ]a, b]\ .$$

Alors :

1) *Si* $\int_{a^+}^b g(x)\,dx$ *converge, alors* $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$ *converge aussi.*
2) *Si* $\int_{a^+}^b f(x)\,dx = +\infty$ *(diverge), alors* $\int_{a^+}^b g(x)\,dx = +\infty$ *(diverge aussi).*

Preuve:



Si on fixe $a < \alpha < b$, alors par la propriété de l'intégrale classique,

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \leqslant \int_\alpha^b g(x)\,dx\,.$$

Remarquons que les deux côtés de cette inégalité sont des fonctions positives, monotones décroissantes en α. Puisque $\int_\alpha^b g(x)\,dx$ est majorée par sa limite lorsque $\alpha \to a^+$, qui est finie et vaut $\int_{a^+}^b g(x)\,dx$, ceci implique aussi que

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \leqslant \int_{a^+}^b g(x)\,dx\,.$$

On obtient la première affirmation en prenant la limite $\alpha \to a^+$ dans cette inégalité.

La deuxième se démontre de la même façon, en prenant d'abord la limite $\alpha \to a^+$ dans $\int_\alpha^b f(x)\,dx$. □

Remarque 13.9. Remarquons que ce résultat est l'analogue continu direct du critère de comparaison pour les séries. ◇

Exemple 13.10. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{1^+}^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx\,.$$

Le calcul de la primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$ étant hardu, on cherche plutôt à faire une comparaison avec l'intégrale d'une autre fonction, plus simple.

En effet, pour tout $x \in]1,2]$, on peut factoriser x^3-1,

$$0 \leqslant f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(\underbrace{x^2+x}_{\geqslant 0}+1)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}} = g(x)\,.$$

Mais maintenant,

$$\int_{1^+}^2 g(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 1^+}\int_\alpha^2 g(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 1^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_\alpha^2 = 2 \quad \text{(converge)}\,.$$

Donc l'intégrale de f converge aussi.

On a donc montré que $\int_{1^+}^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ converge, sans avoir eu besoin de calculer une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. ◇

13.2.2 Intégrales du type $\displaystyle\int_{0^+}^b \frac{dx}{x^q}$

On a vu dans les exemples que si

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,,$$

alors la convergence/divergence de intégrale généralisée $\int_{0^+}^b f(x)\,dx$ va dépendre de la "vitesse" à laquelle $f(x)$ tend vers l'infini à l'approche de 0^+. Dans le cas des fonctions du type $f(x) = \frac{1}{x^q}$, on peut distinguer exactement les cas en fonction de la valeur de l'exposant q :

Théorème 13.11. *Pour tout $b > 0$,*

$$\int_{0^+}^b \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \frac{b^{1-q}}{1-q} \text{ (converge)} & \text{si } q < 1\,,\\ +\infty \text{ (diverge)} & \text{si } q \geqslant 1\,.\end{cases}$$

Preuve: On a déjà vu le cas $q = 1$ dans un exemple, donc on considère $q \neq 1$. Fixons $0 < \alpha < b$. Par un calcul explicite de la primitive,

$$\int_\alpha^b \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q}\Big\{\frac{1}{b^{q-1}} - \frac{1}{\alpha^{q-1}}\Big\}$$

Puis il suffit de remarquer que

- ⋆ si $q > 1$, alors $\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha^{q-1}} = +\infty$, et
- ⋆ si $q < 1$, alors $1 - q > 0$, et donc $\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha^{q-1}} = \lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^{1-q} = 0$,

ce qui conclut la preuve. □

Exemple 13.12. Considérons

$$\int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2\cos(x)}\,dx\,,$$

qui est généralisée puisque $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2\cos(x)} = +\infty$. Comme $0 < \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$, on peut utiliser la comparaison

$$\int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2\cos(x)}\,dx \geqslant \int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty\,,$$

puisque dans cette dernière, $q = 2 > 1$. ◇

13.2.3 Un critère via une limite de quotient

Une conséquence de la proposition énoncée plus haut :

Proposition 17. *Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}_+$, continues, telles que*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0\,.$$

Alors $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_{a^+}^b g(x)\,dx$ converge.

(Il existe bien sûr une affirmation analogue pour $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$.)

Preuve: Par l'existence et positivité de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{L}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3L}{2}\,, \qquad \forall x \in]a, a+\delta[\,.$$

On a donc

$$0 < \frac{L}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3L}{2}g(x)\,, \qquad \forall x \in]a, a+\delta[\,,$$

d'où on peut obtenir les comparaisons voulues, à l'aide du critère de comparaison énoncé plus haut. □

Exemple 13.13. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{-1^+}^1 \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x^2)}{\sqrt{x+1}}\,dx\,.$$

Cette intégrale est bien généralisée puisque $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Pourtant, on remarque que ce qui fait tendre f vers l'infini, c'est la présence de $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$: le sinus ne pose pas de problème (à part pour le calcul de la primitive). Si on pose

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,,$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{-1^+}^{1} g(x) &= \lim_{\alpha\to -1^+}\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\\ &= 2\lim_{\alpha\to -1^+}\big(\sqrt{2}-\sqrt{\alpha+1}\big)\\ &= 2\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Et comme

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -1^+}\sin(\tfrac{\pi}{2}x^2) = 1 > 0\,,$$

l'intégrale généralisée de f converge aussi. ◇

Exemple 13.14. L'exemple vu précédemment, $\int_{1^+}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$, peut aussi se traiter en utilisant la proposition. Posons

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,,$$

qui comme on sait a une intégrale généralisée sur $]1,2]$ convergente (puisque $q = \frac{1}{2} < 1$). On remarque alors que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x^3-1}} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{1}{x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0\,,$$

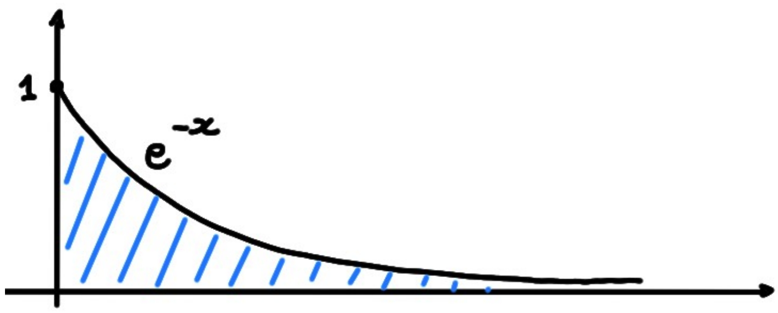
on en déduit, par la proposition, que $\int_{1^+}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ converge. ◇

13.3 Type II

Un autre type d'intégrale important, qui n'entre pas dans le cadre de l'intégrale de Riemann/Darboux, est celui où on intègre une fonction sur un domaine non-borné. Ici, on considérera principalement des intervalles de la forme

$$[a,\infty[\,,\quad]-\infty,b]\,,\quad \text{ou }]-\infty,+\infty[\,.$$

Exemple 13.15. Considérons $f(x) = e^{-x}$, sur $[a,\infty[$. Par exemple, si $a = 0$:



On sait que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,,$$

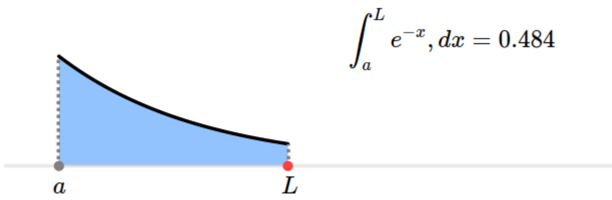
mais peut-on quand-même calculer l'aire sous son graphe ?

Ici aussi, l'approche classique ne fonctionne pas puisqu'on n'a pas de façon naturelle d'approximer l'aire sous la courbe avec une somme *finie* de rectangles : le dernier rectangle de la somme de Darboux supérieure aura toujours une aire infinie !

Par contre, on peut toujours intégrer la fonction sur un intervalle borné et fermé, $[a, L]$, où $L > a$ est grand, fixé :

$$\int_a^L e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_a^L = e^{-a} - e^{-L}\,.$$

Cette dernière expression dépend de L, mais on voit qu'elle se comporte bien lorsque L grandit. En fait, on peut prendre la limite $L \to \infty$ (sur l'animation, changer L et observer comme la valeur de l'intégrale tend vers une valeur à mesure que L augmente) :



Ce que l'on peut donc faire, c'est donner un sens à l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$, à l'aide d'une limite :

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx := \lim_{L\to\infty}\int_a^L e^{-x}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left(e^{-a} - e^{-L}\right) = e^{-a}\,.$$

Comme dans la section précédente, ce résultat peut paraître peu intuitif, puisque la région sous le graphe n'est pas limitée dans le plan. Elle s'étend infiniment loin le long de l'axe des $x > 0$ et pourtant, on pourrait la peindre avec une quantité *finie* de peinture. ◇

13.3.1 Intégrer sur un intervalle non-borné

Généralisons l'idée présentée dans le dernier exemple :

Définition 13.16. 1) Soit $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$ continue. Si la limite

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{L\to\infty}\int_a^L f(x)\,dx\,,$$

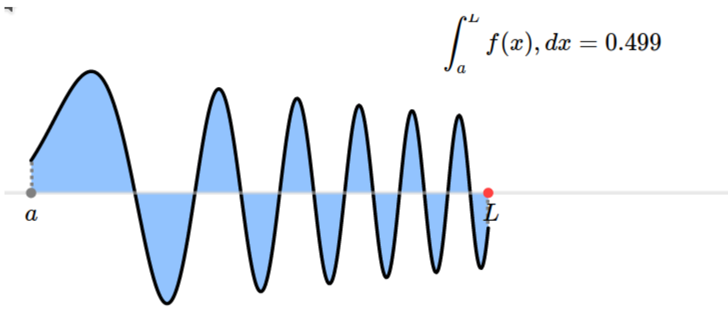
existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de Type II (de f sur $[a, \infty[$)**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

2) Soit $f\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si la limite

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{L\to-\infty}\int_L^b f(x)\,dx\,,$$

existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de Type II (de f sur $]-\infty, b]$)**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

Si f est positive sur tout l'intervalle, l'intégrale généralisée peut être interprétée comme l'aire sous son graphe. Mais l'intégrale généralisée est définie pour des fonctions de signe a priori quelconque, et dans ce cas, la valeur de l'intégrale ne peut plus être interprétée comme une aire géométrique.



On se souvient que dans le chapitre sur les séries, la série harmonique a un terme général qui tend vers zéro, mais trop lentement pour faire converger la série.

Le même phénomène s'observe dans les intégrales de Type II : il ne suffit pas que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ pour que son intégrale généralisée converge.

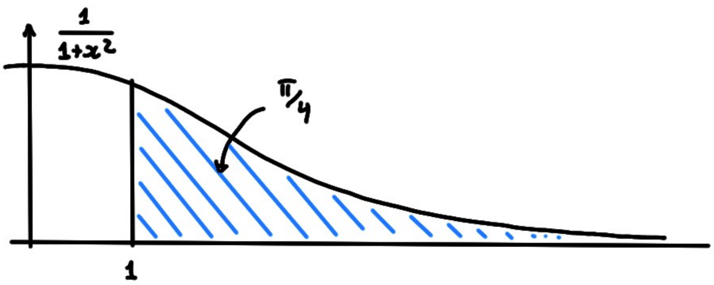
Exemple 13.17. Considérons $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty[$. On a

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{L\to\infty} \int_1^L \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{L\to\infty} \log(x)\Big|_1^L \\ &= \lim_{L\to\infty} \log(L) \\ &= \infty\,. \end{aligned}$$

◇

Informel 13.18. Dans l'exemple ci-dessus : la fonction $\frac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque $x \to \infty$, elle ne tend "pas vers zéro assez vite pour être intégrable à l'infini".

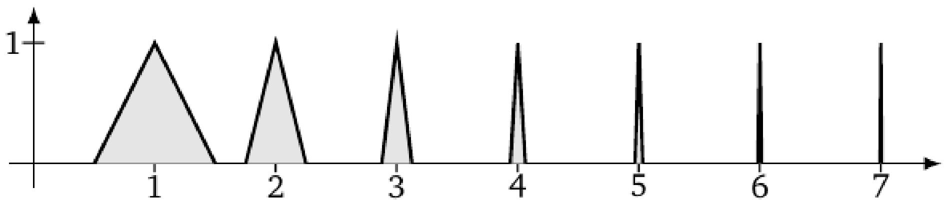
Exemple 13.19. Considérons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[1, +\infty[$:



$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{L\to\infty} \int_1^L \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{L\to\infty} \left\{\arctan(L) - \arctan(1)\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

◇

Remarque 13.20. Remarquons qu'à la différence des séries, une fonction peut ne **pas** tendre vers zéro et avoir une intégrale convergente ! Considérons une fonction dont le graphe est du type suivant :



La fonction est celle définie par les contours des triangles, et vaut zéro entre les triangles. Le $k$ème triangle a une base de largeur $b_k > 0$; tous les triangles sont de hauteur égale à 1. Comme $f(x) \geqslant 0$, l'intégrale généralisée représente l'aire sous le graphe de f, qui vaut la somme des aires de tous les triangles :

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 1} A_k = \sum_{k\geqslant 1} b_k\,,$$

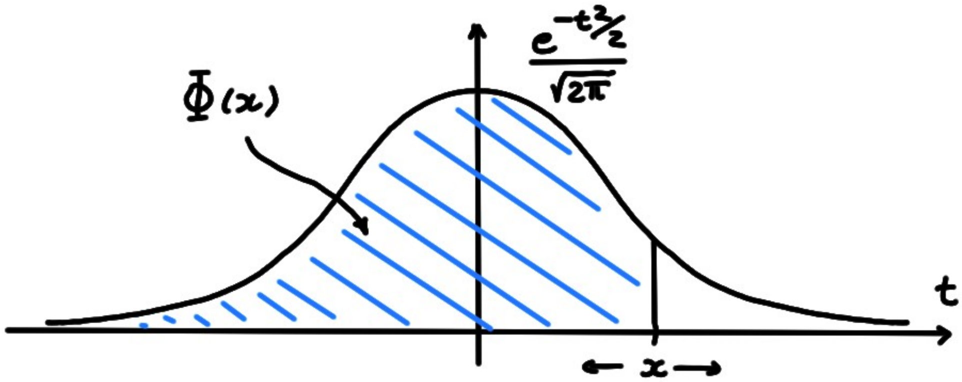
où $A_k = b_k \cdot 1 = b_k$ est l'aire du $k$ème triangle. Si les bases décroissent suffisamment vite, alors la somme des aires de tous les triangles est finie. On peut le garantir en prenant par exemple $b_k = \frac{1}{2^k}$. Dans ce cas,

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 1} A_k = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k} = 1\,,$$

donc l'intégrale converge. Pourtant, comme les triangles ont tous une hauteur égale à 1, la fonction ne tend pas vers zéro. ◇

Exemple 13.21. Une intégrale de Type II très importante en théorie des probabilités (et en statistiques), est celle utilisée pour définir la **fonction d'erreur** (de Gauss) :

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$



On peut montrer (exercice) que l'intégrale converge toujours, et définit donc bien une fonction de $x \in \mathbb{R}$. ◇

13.3.2 Un critère de comparaison

Comme pour celles de Type I, les intégrales de Type II ont un critère de comparaison, valabe pour des fonctions de signe constant.

Proposition 18. *Soient $f, g\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ continues, telles que*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in [a,\infty[\ .$$

Alors :

1) *Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge aussi.*
2) *Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$, alors $\int_a^{\infty} g(x)\,dx = +\infty$.*

Preuve: Par la propriété de l'intégrale de Riemann/Darboux on peut écrire, pour tout $L > a$,

$$0 \leqslant \int_a^{L} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{L} g(x)\,dx\,,$$

et par la propriété de Chasles, ces deux intégrales sont monotones croissantes en L. Puisque la limite de la deuxième existe et est finie, celle de la première l'est aussi. □

Exemple 13.22. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée donnée par

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

On ne connaît pas de primitive pour e^{-x^2}, mais on peut quand-même montrer que l'intégrale converge, en utilisant une comparaison. Le choix de la comparaison va être guidé par le fait que si on ne sait pas intégrer e^{-x^2}, on sait quand-même intégrer e^{-cx}, quel que soit $c > 0$.

Décomposons d'abord l'intégrale en deux,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^2 e^{-x^2}\,dx + \int_2^\infty e^{-x^2}\,dx\,,$$

La première partie ne pose pas de problème : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné, $[0,2]$. Pour la deuxième partie, on a toujours que $x \geqslant 2$, et donc $x^2 = x\cdot x \geqslant 2x$, ce qui entraîne $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}$. Or comme

$$\int_2^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2x}\right\}\Big|_2^L = \frac{1}{2}e^{-4}\,,$$

on conclut que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge aussi. (On a pris $c = 2$, mais on aurait pu prendre n'importe quel $c > 0$.) ◇

Exemple 13.23. Considérons

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}}\,dx\,.$$

On pourrait essayer d'utiliser le fait que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\sqrt[5]{x^5+1} \geqslant \sqrt[5]{x^5} = x\,,$$

ce qui donne

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Malheureusement, comme l'intégrale du membre de droite est infinie, cette inégalité ne nous dit rien sur l'intégrale de départ !

Remarquons que si $x \geqslant 1$, alors $x^5 \geqslant 1^5 = 1$, et donc

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+x^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2x^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}x}\,.$$

Mais comme $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, notre intégrale diverge aussi. ◇

13.3.3 Intégrales du type $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$

Théorème 13.24. *Pour tout $a > 0$,*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} \text{ (converge)} & \text{si } p > 1\,, \\ +\infty \text{ (diverge)} & \text{si } p \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Preuve: On a déjà traité le cas $p = 1$ dans un exemple précédent :

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{L\to\infty} \log(x)\Big|_a^L = +\infty$$

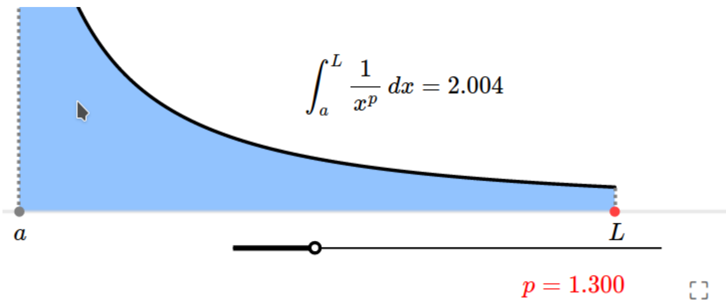
Ensuite, pour $p \neq 1$, on peut faire

$$\int_a^L \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^L = \frac{1}{1-p}\begin{cases}(\frac{1}{L^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}) & \text{si } p > 1\\ (L^{1-p} - \frac{1}{a^{p-1}}) & \text{si } p < 1\end{cases}$$

Donc

$$\lim_{L\to\infty}\int_a^L \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{si } p > 1\,,\\ +\infty & \text{si } p < 1\,,\end{cases}$$

ce qui conclut la preuve pour tous les cas. □



Informel 13.25. Donc l'intégrale de $\frac{1}{x^p}$ "à l'infini" est très sensible à la valeur de p lorsque p est proche de 1 ! Par exemple,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.0000000001}} < +\infty\,,$$

alors que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{0.9999999999}} = +\infty\,,$$

Exemple 13.26. Considérons

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^7+1}\,.$$

On peut en principe, avec les méthodes du chapitre sur l'**intégration des fonctions rationnelles** (lien vers la section m_integrale_fonctions_rationnelles), calculer la primitive de $\frac{1}{x^7+1}$. Mais si on désire juste savoir si cette intégrale converge ou diverge, sans passer par la primitive, on peut utiliser une comparaison et le théorème ci-dessus. En effet, comme $\frac{1}{x^7+1} \leqslant \frac{1}{x^7}$ pour tout $x > 0$ (donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$), on a

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^7+1} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^7} < \infty$$

En effet, dans cette dernière, $a = 1 > 0$, et $p = 7 > 1$. ◇

Informel 13.27. Majorer une fonction positive $f(x)$ par une autre fonction plus simple est un bon moyen d'étudier la convergence de son intégrale, en évitant de passer par sa primitive. Mais il faut prendre garde à ne pas introduire de nouveau problème en faisant cette majoration.

Considérons
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1}\,.$$
Cette intégrale est de Type II, puisqu'elle est continue sur $[0,\infty[$ (en particulier, elle est continue et bornée au voisinage de 0 et donc n'est *pas* de Type I). Pour l'étudier, on observe que son comportement pour x grand, est régi essentiellement par le terme "x^3", ce qui mène à remarquer que $\sqrt{x}+1 \geqslant 0$, et à écrire la comparaison
$$0 \leqslant \frac{1}{x^3+\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{1}{x^3}\,.$$
Malheureusement, la fonction $\frac{1}{x^3}$ a un problème en zéro, que la fonction de départ n'avait pas.

Pour pouvoir profiter de cette comparaison, on peut d'abord séparer l'intégrale en deux, en écrivant par exemple
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1}\,.$$
La première intégrale est une intégrale de Riemann/Darboux, et est donc bien définie. C'est pour la deuxième que l'on peut utiliser la comparaison et le fait que l'intégrale de $\frac{1}{x^3}$ est convergente, puisque maintenant sur l'intervalle $[1,\infty[$:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} < \infty\,.$$
On en déduit que l'intégrale est convergente.

13.3.4 Un critère via une limite de quotient

Proposition 19. *Soient $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues, telles que*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0\,.$$
Alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.

Il existe bien sûr une affirmation analogue pour $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Exemple 13.28. Considérons l'intégrale généralisée
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}}\,.$$
Remarquons que la fonction que l'intègre est bien définie, puisque
$$x^2+\sin(x)e^{\sin(x)} \geqslant x^2-e \geqslant 4-e > 0 \qquad \forall x \geqslant 2\,.$$

Lorsque x est grand, ce qui est responsable de la petitesse de $f(x) = \frac{1}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}} \geqslant 0$ est le "x^2" au dénominateur. Ceci suggère de considérer

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\,.$$

On a bien $f(x), g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 2$, et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin(x)e^{\sin(x)}}{x^2}} = 1 > 0\end{aligned}$$

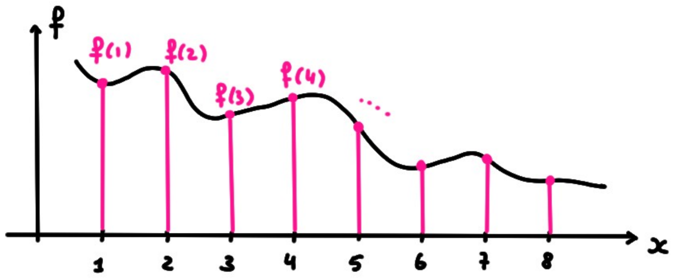
Or l'intégrale de g converge ($p = 2 > 1$), donc celle de f converge aussi. ⋄

13.3.5 Utilisation dans l'étude des séries

Nous allons voir maintenant que parfois, une série peut être *comparée* à une intégrale généralisée de Type II, ce qui peut grandement faciliter l'étude de sa convergence. Ceci vient du fait que l'intégrale étant par définition construite à l'aide d'une variable *continue* x, son étude peut se faire à l'aide du Théorème Fondamental de l'Analyse (un outil qui n'existe pas pour l'étude des séries, dont la variable n est *discrète*).

Considérons une série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ dont le terme général a_n est en fait une fonction réelle $f(x)$ évaluée en $x = n$:

$$a_n = f(n)$$



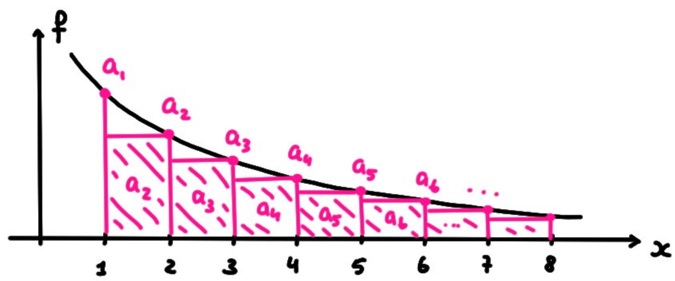
Il est alors possible, sous certaines conditions, de relier la convergence de la série à l'intégrabilité de la fonction à l'infini :

Théorème 13.29. *Soit $a > 0$ et $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante. Soit n_0 un entier tel que $n_0 \geqslant a$. Considérons la série de terme général $a_n = f(n)$. Alors*

$$\sum_{n\geqslant n_0} a_n \quad \textit{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{converge}\,.$$

Preuve: Pour simplifier, supposons que $a = n_0 = 1$.

D'une part, pour chaque entier $n \geqslant 2$, on peut interpréter a_n comme l'aire d'un rectangle de largeur égale à 1 situé à gauche de $x = n$, dont la base est l'intervalle $[n-1, n]$, de hauteur $a_n = f(n)$. Comme f est décroissante, ce rectangle est *au-dessous* du graphe de f sur tout l'intervalle $[n-1, n]$:

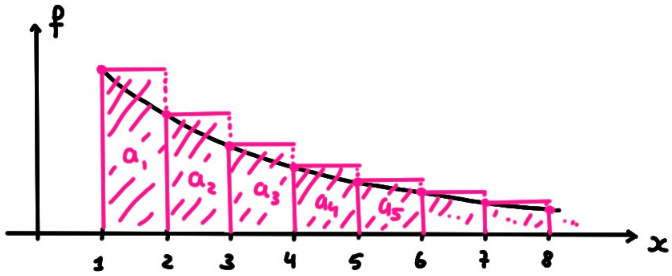


On peut donc écrire

$$\sum_{n \geqslant 2} a_n \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

Cette inégalité implique que si l'intégrale est finie, alors la série converge, et si la série diverge, alors l'intégrale diverge aussi.

D'autre part on peut, pour chaque entier $n \geqslant 1$, interpréter a_n comme l'aire d'un rectangle de largeur égale à 1 situé à droite de $x = n$, dont la base est l'intervalle $[n, n+1]$, de hauteur $a_n = f(n)$. Comme f est décroissante, ce rectangle est *au-dessus* du graphe de f sur tout l'intervalle $[n, n+1]$:



On peut donc écrire

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n \geqslant \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

Cette inégalité implique que si l'intégrale est infinie, alors la série diverge, et si la série converge, alors l'intégrale converge. □

Exemple 13.30. Comme $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est décroissante pour tout $p \geqslant 0$, on déduit du théorème précédent que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \quad \text{converge}\,.$$

Par le théorème de la section précédente, ceci fournit donc le résultat déjà prouvé dans le chapitre sur les séries :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1\,, \\ \text{diverge} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant 1\,. \end{cases}$$

◇

Passons maintenant au cas d'un type de série qu'aucun de nos critères de convergence permet d'étudier :

Exemple 13.31. Considérons

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\log(n))^{\mu}}\,,$$

où $\mu > 0$.

Si $\mu = 0$, cette série est la série harmonique, donc elle diverge. Mais si $\mu > 0$, son terme général décroît *strictement plus vite* que $\frac{1}{n}$. On peut alors se poser la question de savoir si le terme $\frac{1}{\log(n)^{\mu}}$ est suffisant pour permettre à la série de converger.

Voyons le terme général comme $a_n = f(n)$, où

$$f(x) = \frac{1}{x(\log(x))^{\mu}}\,.$$

Remarquons que f est positive et strictement décroissante, puisque

$$f'(x) = -\frac{(\log x)^{\mu} + \mu(\log x)^{\mu-1}}{(x(\log x)^{\mu})^2} < 0 \qquad \forall x \geqslant 2\,.$$

Donc, par le théorème précédent, la série converge si et seulement si l'intégrale généralisée

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$$

converge. Mais, par le changement de variable $z = \log(x)$,

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\mu}\,dx &= \lim_{L\to\infty}\int_2^L \frac{1}{x(\log x)^\mu}\,dx\\ &= \lim_{L\to\infty}\int_{\log 2}^{\log L} \frac{1}{z^\mu}\,dz\\ &= \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{z^\mu}\,dz\,,\end{aligned}$$

qui comme on sait converge si et seulement si $\mu > 1$. On en conclut que

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\log(n))^\mu}\begin{cases}\text{converge} & \text{si } \mu > 1\,,\\ \text{diverge} & \text{si } \mu \leqslant 1\,.\end{cases}$$

◇

Remarque 13.32. Ce dernier résultat permet de donner des exemples de séries dont le terme général décroît plus vite que celui de la série harmonique, mais qui sont aussi divergentes. Par exemple : $\sum_n \frac{1}{n\log(n)}$ diverge. ◇

13.4 Type III

Les intégrales généralisées de Type III représentent des combinaisons d'intégrales de Types I et II.

13.4.1 Mélange de Type I et I

Définition 13.33. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $a < c < b$. Si

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{b^-} f(x)dx$$

convergent, on pose

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx := \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b^-} f(x)dx\,.$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge** ; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 13.34. Considérons l'intégrale de Type III

$$\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx.$$

On peut la décomposer en

$$\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx + \int_{1}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx\,.$$

Le changement de variable $x = \varphi(u) = 2u^2$ permet d'écrire

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2}u\sqrt{2-2u^2}}4u\,du = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,.$$

Ce changement de variable montre que la première intégrale converge,

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{\varepsilon/2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\arcsin(1/\sqrt{2}) - \arcsin(\sqrt{\varepsilon/2})\Big) \\
&= 2\Big(\arcsin(1/\sqrt{2}) - \arcsin(0)\Big) \\
&= 2\arcsin(1/\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

de même pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{\beta\to 2^-}\int_{1}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx \\
&= 2\lim_{\beta\to 2^-}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\beta/2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2\lim_{\beta\to 2^-}\Big(\arcsin(\sqrt{\beta/2}) - \arcsin(1/\sqrt{2})\Big) \\
&= 2\Big(\arcsin(1) - \arcsin(1/\sqrt{2})\Big) \\
&= \pi - 2\arcsin(1/\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

donc l'intégrale converge, et sa valeur est

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= 2\arcsin(1/\sqrt{2}) + (\pi - 2\arcsin(1/\sqrt{2})) \\
&= \pi\,.
\end{aligned}$$

◇

Exemple 13.35. Considérons l'intégrale de Type III

$$\int_{0^+}^{1-} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx\,,$$

que l'on décompose naturellement en

$$\int_{0^+}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx\,.$$

La deuxième intégrale converge puisque

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x}}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx \\
&= 2\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du < \infty\,.
\end{aligned}$$

qui converge ($p = \frac{1}{3} < 1$). Par contre la première diverge puisque

$$\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx \geqslant \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\,dx = \sqrt[3]{2}\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \infty\,.$$

Donc l'intégrale diverge. ◇

13.4.2 Mélange de Types I et II

Définition 13.36. Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $a < c < \infty$. Si

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{convergent,}$$

on pose

$$\int_{a^+}^{\infty} f(x)dx := \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,,$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge** ; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 13.37. Considérons

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

On sépare :

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Comme ici, $p = \frac{3}{2} > 1$, la première diverge et la deuxième converge. Donc toute l'intégrale diverge. ◇

Exemple 13.38. Considérons l'intégrale de Type III donnée par

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

En décomposant

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{0^+}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$$

on remarque que la première (de Type I) converge puisque $e^{-x} \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$, et donc

$$\int_{0^+}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,,$$

qui converge puisque $p = \frac{1}{2} < 1$. La deuxième converge aussi puisque

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1}}\,dx = e^{-1}\,.$$

Donc l'intégrale de Type III converge. ◇

13.4.3 Mélange de Type II et II

Définition 13.39. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, et soit $c\in\mathbb{R}$. Si

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

convergent, on pose

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,.$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge** ; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 13.40. Remarquons que comme dans le cas précédent, le choix du nombre c n'influe pas sur la convergence/divergence de l'intégrale, ni sur la valeur de l'intégrale (dans le cas où elle est convergente). ◇

Exemple 13.41. Considérons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx\,,$$

que l'on décompose en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Comme

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{L\to\infty}\int_{0}^{L} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2}\log(L^2+1) = +\infty\,,$$

l'intégrale est divergente. ◇

Informel 13.42. Remarquons que dans ce dernier exemple, le fait que la fonction est impaire implique que pour tout $L>0$,

$$\int_{-L}^{L} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0\,,$$

et donc évidemment

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0\,,$$

Mais cette limite *n'est pas* la définition de $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx$.