Chapitre 6

Fonctions réelles

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commence l'étude des *fonctions réelles d'une variable*. Les notions de base relatives à ces fonctions (injectivité, surjectivité, bijectivité, graphe) se trouvent **ici** (lien vers la section `m_fonctions_generalites_fonctions_reelles`).

Nous commencerons, dans ce chapitre, par décrire brièvement certaines propriétés particulières qu'une fonction peut posséder (monotonie, parité, périodicité), et introduirons les notions de minimum/maximum ainsi que d'infimum/supremum.

Les notions de *limite* associées à une fonction réelle, puis celles de *continuité*, *dérivabilité* et *intégrabilité* feront l'objet de toute la suite du cours.

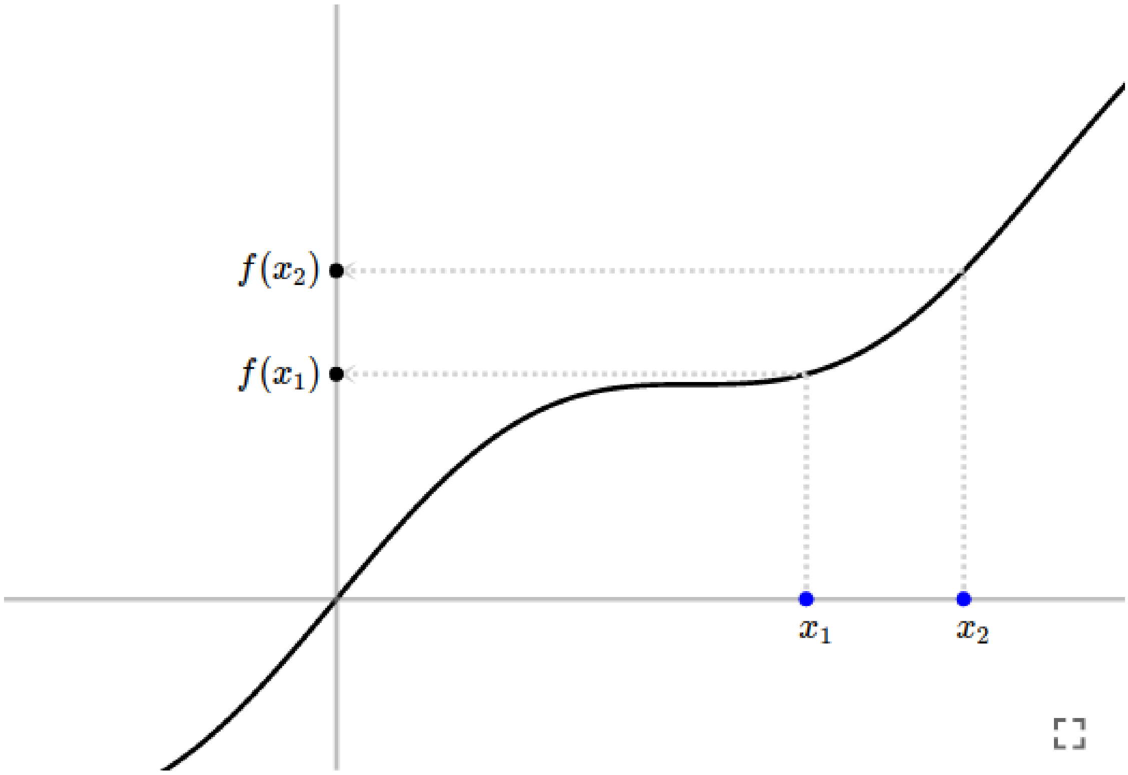
6.2 Monotonie

Une première propriété très particulière qu'une fonction peut posséder est celle d'être *monotone*.

Définition 6.1. $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f est **croissante sur** I si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
2) f est **strictement croissante sur** I si $f(x_1) < f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
3) f est **décroissante sur** I si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
4) f est **strictement décroissante sur** I si $f(x_1) > f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Si f satisfait une de ces propriétés, elle est **monotone**.



Exemple 6.2. La fonction $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $0 \leqslant x_1 < x_2$, alors $x_2 - x_1 > 0$, et donc

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} > 0\,,$$

ce qui implique que $f(x_1) < f(x_2)$. De même, on montre que $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. ◇

Exemple 6.3. Par notre définition, une fonction qui est *constante* sur I (c.à-d. qu'il existe un réel C tel que $f(x) = C$ pour tout $x \in I$) est à la fois croissante et décroissante sur I. ◇

6.2.1 Variation

Étudier la **variation** d'une fonction, c'est trouver les intervalles sur lesquelles elle est croissante/décroissan

L'étude de la variation d'une fonction donnée, basée uniquement sur la *définition* de cette fonction (comme x^2 dans l'exemple ci-dessus), peut être difficile. Le *calcul différentiel*, que nous développerons plus loin, fournira un outil puissant permettant de faire cette analyse.

6.3 Parité

Une autre propriété qu'une fonction peut posséder est par rapport à son comportement vis-à-vis de la transformation $x \mapsto -x$.

Ci-dessous, on considère des fonctions dont le domaine $D \subset \mathbb{R}$ est **symétrique** c'est-à-dire que si $x \in D$, alors $-x \in D$.

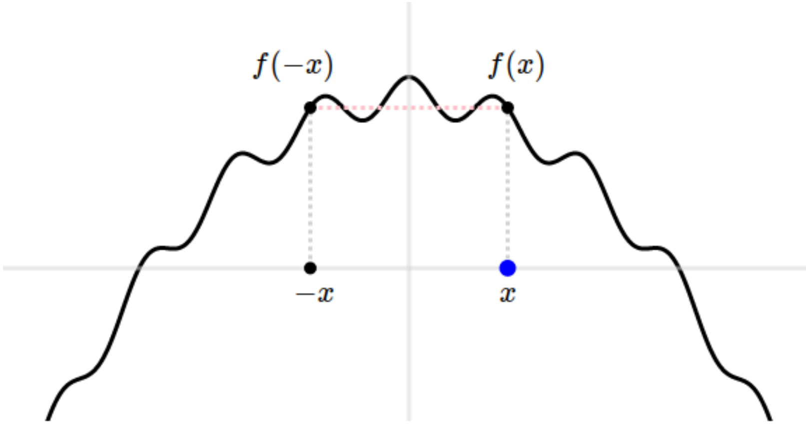
Définition 6.4. $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **paire** si

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D\,.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe de f, alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, f(x)) = (-x, y)$$

appartient aussi au graphe de f. On conclut que le graphe d'une fonction paire est *invariant sous l'effet d'une réflexion par rapport à l'axe* Oy.



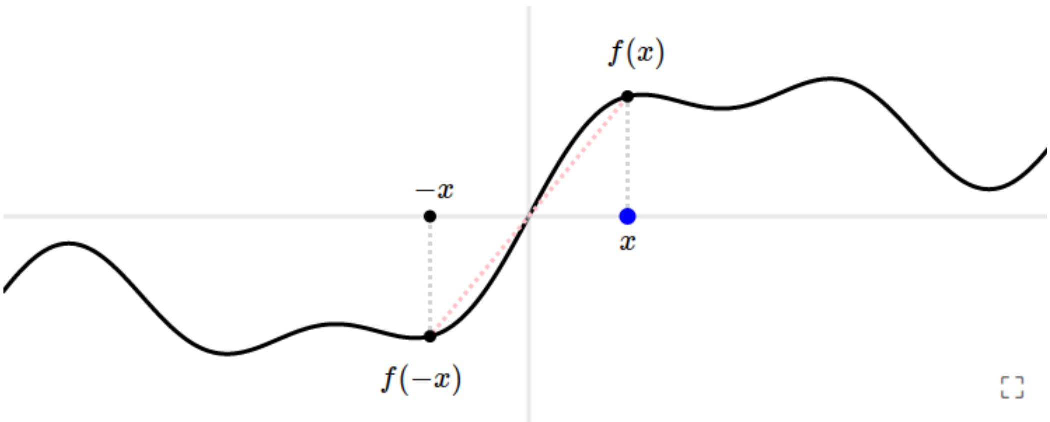
Définition 6.5. $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **impaire** si

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D\,.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe, alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = (-x, -y)$$

appartient aussi graphe de f. Donc le graphe d'une fonction impaire est *invariant sous une rotation de* 180^o *autour de l'origine* :



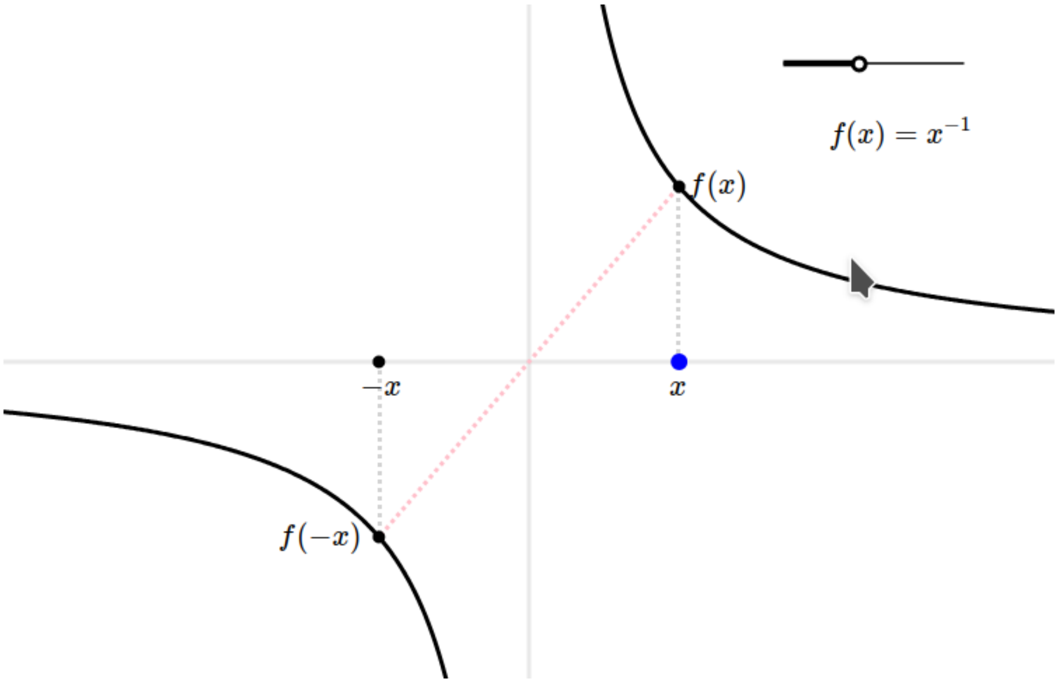
Exemple 6.6. Décrivons l'exemple qui est à l'origine de la dénomination de fonction "paire" ou "impaire". Pour un entier $p \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$f(x) = x^p$$

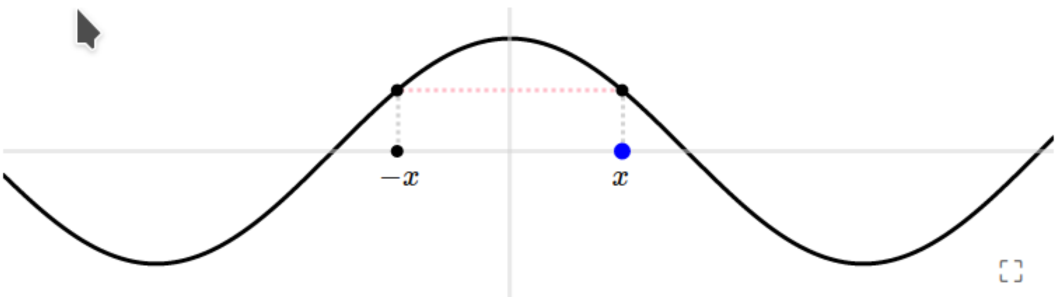
est

- $\star$ paire si p est pair,
- $\star$ impaire si p est impair.

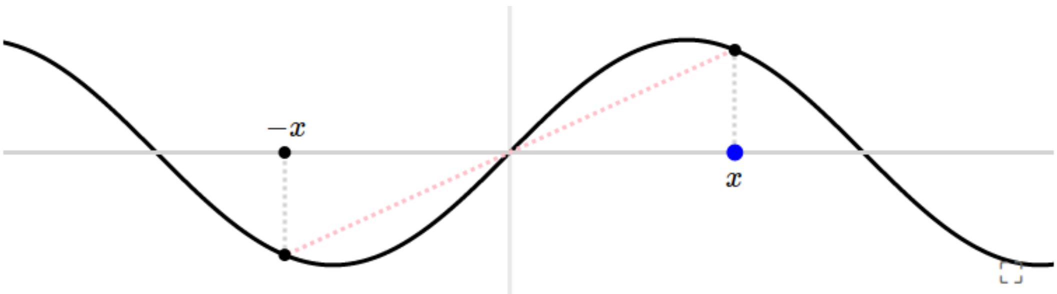
Remarquons que si p est négatif, alors 0 ne fait pas partie du domaine de f. ◇



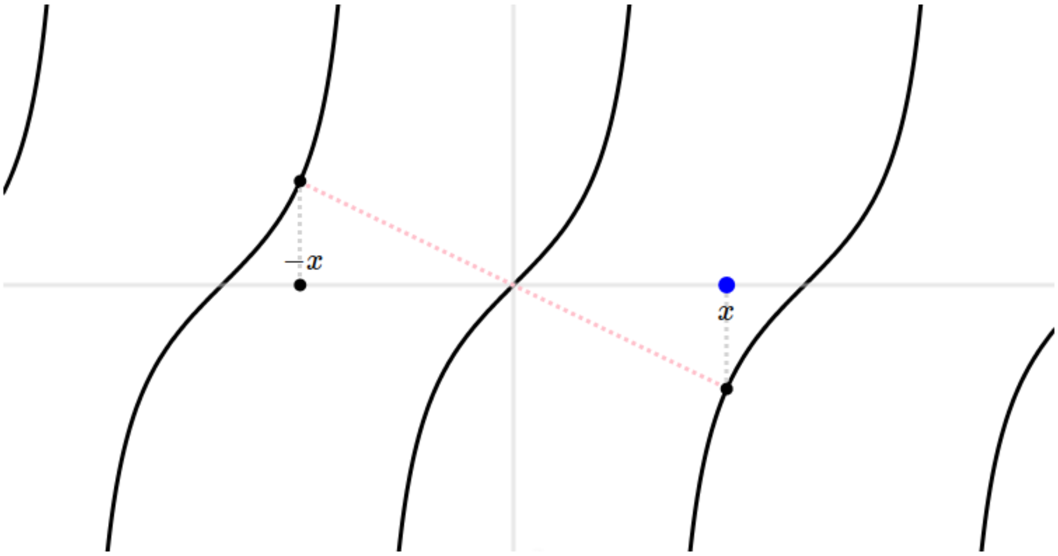
Exemple 6.7. Sur $D = \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ est paire,



et $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,



Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, $x \mapsto \tan(x)$ est impaire :



En effet,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)\,.$$

◇

Exemple 6.8. Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}}$$

est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{\sin(2(-x))}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{-\sin(2x)}{-(e^x - e^{-x})} = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}} = f(x)\,.$$

◇

Pour montrer qu'une fonction n'est pas paire (resp. pas impaire), il suffit de trouver un point x_* de son domaine où $f(-x_*) \neq f(x_*)$ (resp. $f(-x_*) \neq -f(x_*)$).

Exemple 6.9. Considérons, sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = x+1$. On remarque que $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, et donc $f(-1) \neq f(1)$, et donc f n'est pas paire. Et comme $f(-1) \neq -f(1)$, f n'est pas impaire non plus. ◇

Une fonction, en général, n'a pas de raison d'être paire ou impaire ; pourtant toute fonction contient un peu d'une fonction paire, et un peu d'une fonction impaire :

Lemme 17. *Si D est symétrique, toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Preuve: Cherchons à écrire $f(x) = p(x) + i(x)$, où $p(x)$ est paire et $i(x)$ est impaire. On doit donc avoir

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)\,,$$

et donc $i(x)$ et $p(x)$ doivent satisfaire

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + i(x) \\ f(-x) &= p(x) - i(x)\,. \end{aligned}$$

Ce petit système linéaire se résout facilement. Sa solution est unique, et donnée par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\,, \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\,.$$

□

Exemple 6.10. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ n'est ni paire ni impaire, mais on peut quand-même l'écrire $e^x = p(x) + i(x)$, où

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

est paire, et

$$i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

est impaire. (Pour les fonctions hyperboliques, voir **ici** (lien vers la section m_fonctions_hyperbolique ◇

6.4 Périodicité

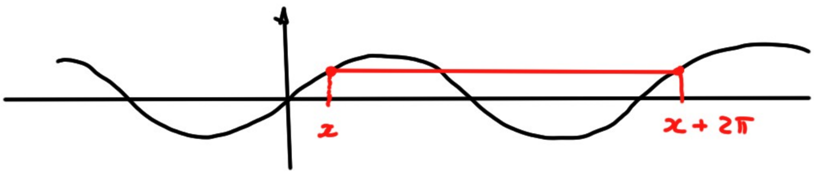
Définition 6.11. Soit $t > 0$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite t-**périodique** si

$$f(x + t) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Si il existe un $t > 0$ minimal jouissant de cette propriété, on l'appelle **période de** f, et on le note $T > 0$.

Remarque 6.12. Si f est t-périodique, elle est aussi $\pm 2t$-périodique, $\pm 3t$-périodique, etc. ◇

Exemple 6.13. $f(x) = \sin(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$:



$f(x) = \cos(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$. ◇

Exemple 6.14. $f(x) = \tan(x)$ (sur son domaine) est π-périodique car

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) .$$

◇

Exemple 6.15. Considérons une fonction constante : $f(x) = C$. On a bien $f(x+t) = f(x)$ pour tout x et tout $t > 0$, donc f est t-périodique pour tout $t > 0$. Mais comme il n'existe pas de *plus petit* t *strictement positif* avec cette propriété, la fonction n'a pas de "période" à proprement parler. ◇

Exemple 6.16. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} , \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Montrons que si $t \in \mathbb{Q}$ est un rationnel quelconque, alors f est t-périodique. En effet, prenons un $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 1$, et comme $x + t \in \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x + t) = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$, et comme $x + t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x + t) = 0$. Dans tous les cas, $f(x + t) = f(x)$.

Ici aussi, comme il n'existe pas de "plus petit rationnel $t > 0$", f n'a pas de période. ◇

Remarquons qu'en général, *la somme de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique* !

Exemple 6.17. $f(x) = \sin(2\pi x)$ est périodique, de période $T_f = 1$, et $g(x) = \sin(\sqrt{2}\pi x)$ est périodique, de période $T_g = \sqrt{2}$. Par contre, $f + g$ n'est pas périodique, puisque $\sqrt{2}$ étant irrationnel, aucun multiple de T_g ne coïncidera avec un multiple de T_f. ◇

On peut garantir que $f + g$ est aussi périodique, mais en imposant une condition particulière sur T_f et T_g :

Lemme 18. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période T_f, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période T_g. Alors $f + g$ et $f - g$ sont périodiques si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$.*

Preuve: Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers p, q tels que $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$. Ceci signifie que $qT_f = pT_g$. Ceci implique que si on définit $\tilde{t} = qT_f$, alors pour tout x,

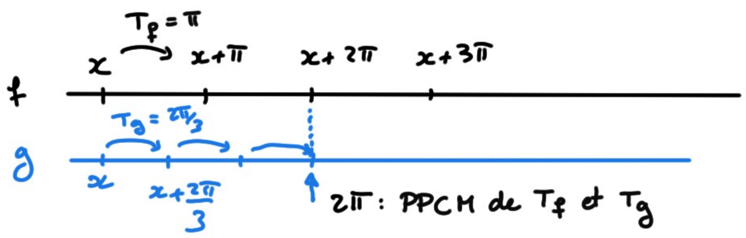
$$\begin{aligned}(f \pm g)(x + \tilde{t}) = f(x + \tilde{t}) \pm g(x + \tilde{t}) &= f(x + qT_f) \pm g(x + qT_f) \\ &= \underbrace{f(x + qT_f)}_{=f(x)} \pm \underbrace{g(x + pT_g)}_{=g(x)} \\ &= (f \pm g)(x)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique que $f \pm g$ est périodique. □

Exemple 6.18. La fonction $f(x) = \sin^2(x)$ a pour période $T_f = \pi$, et $g(x) = \cos(3x)$ a pour période $T_g = \frac{2\pi}{3}$. Comme

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}\,,$$

on conclut par le lemme que $f + g$ et $f - g$ sont périodiques. Mais comment calculer les périodes de ces fonctions ?



En cherchant le plus petit multiple commun entre les périodes de f et g :

$$T_{f\pm g} = \mathrm{ppmc}(T_f, T_g) = 2\pi\,.$$

◇

6.5 Max/min, sup/inf de fonctions

6.5.1 Maximum, minimum

(ici, Video: v_fonctions_extrema_intro.mp4)

Remarque 6.19. Attention : dans la vidéo ci-dessus, préparée pour un autre cours, on mentionne la notion de *continuité*, qui n'apparaîtra que dans un chapitre ultérieur. ◇

Dans un problème *d'optimisation*, il s'agit de savoir si une fonction possède, sur son domaine, des points où sa valeur est plus grande (ou plus petite) que partout ailleurs :

Définition 6.20. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que

⋆ f **possède un maximum (global)** si il existe $x^* \in D$ tel que

$$f(x) \leqslant f(x^*) \quad \forall x \in D\,.$$

On dit que **le maximum de f est réalisé/atteint en** x^*, et on écrit

$$\max_{x\in D} f(x) = f(x^*)\,.$$

⋆ f **possède un minimum (global)** si il existe $x_* \in D$ tel que

$$f(x) \geqslant f(x_*) \quad \forall x \in D\,.$$

On dit que **le minimum de f est réalisé/atteint en** x_*, et on écrit

$$\min_{x\in D} f(x) = f(x_*)\,.$$

Remarque 6.21. On parle de maximum/minimum *global* parce qu'on introduira plus loin la notion de maximum/minimum *local*. ◇

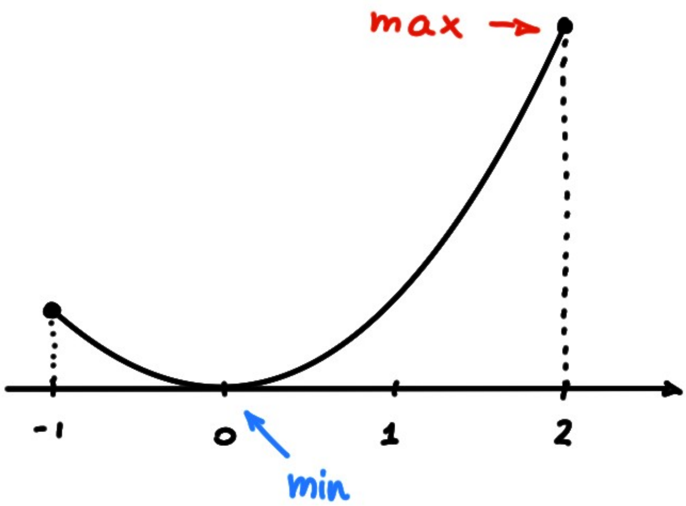
Informel 6.22. Attention : le point x^* (ou x_*), s'il existe, *doit être dans le domaine de la fonction* !

En général, l'existence d'un minimum et d'un maximum n'est pas garantie ; elle dépend de la fonction mais aussi de son domaine.

Exemple 6.23.

$$\begin{aligned} f : [-1,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

atteint son minimum en $x_* = 0$, et son maximum en $x^* = 2$:



Mais si on modifie un peu son domaine, par exemple

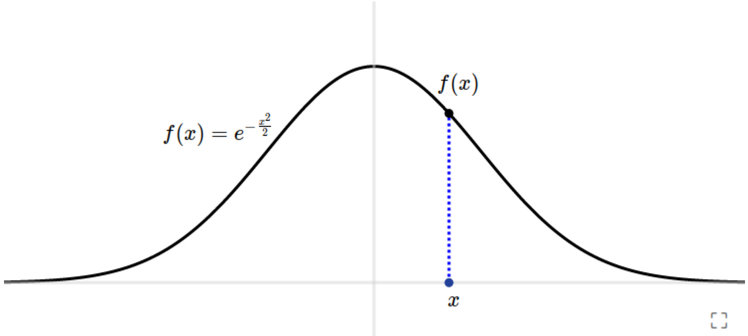
$$\begin{aligned} f : [-1,2[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

alors cette fonction atteint aussi son minimum en $x_* = 0$, mais elle ne possède pas de maximum (maintenant, le point $x = 2$ ne fait plus partie du domaine !). ◇

Exemple 6.24.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

atteint son maximum en $x^* = 0$:



Or quel que soit $x \neq 0$, on peut toujours diminuer strictement la valeur de $e^{-x^2/2}$ en éloignant un peu x de l'origine. Donc g n'a pas de minimum. ◇

Plus tard (**ici** (lien vers la section m_derivee_extremas_globaux_sur_a_b)), nous reviendrons sur la recherche des minima/maxima d'une fonction.

6.5.2 Minorants et majorants

Définition 6.25. $f : D \to \mathbb{R}$ est

- ⋆ **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leqslant M \ \forall x \in D$. On dit dans ce cas que M **majore** f.
- ⋆ **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \geqslant m \ \forall x \in D$. On dit dans ce cas que m **minore** f.

Si f est à la fois majorée et minorée, elle est **bornée**.

Exemple 6.26. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

est minorée par $m = 0$ puisque $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et majorée par $M = 1$ puisque

$$f(x) = \frac{x^2+0}{x^2+1} < \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

◇

Exemple 6.27. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas majorée. Pour le vérifier, on doit montrer que f dépasse n'importe quel seuil en au moins un point. En effet, choisissons un seuil, disons $M = 1000$, et montrons que l'on peut trouver un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant 1000$. Comme la condition $f(x) \geqslant 1000$ est équivalente à $x^2 - 1000x + 1000 \geqslant 0$, et comme cette dernière a un discriminant $\Delta \geqslant 0$, elle possède donc au moins une solution (différente de 1). Donc il existe au moins un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant 1000$.

Mais on peut utiliser le même argument pour une valeur quelconque de M. En effet, la condition $f(x) \geqslant M$ est équivalente à $x^2 - Mx + M \geqslant 0$, dont le discriminant $\Delta = M^2 - 4M \geqslant 0$ dès que $M \geqslant 4$. Ceci montre bien que f n'est pas majorée. ◇

Une fois qu'une fonction est majorée (resp. minorée), on peut considérer le plus petit (resp. plus grand) majorant (resp. minorant).

Définition 6.28. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- ⋆ Si f est majorée (sur D), la **borne supérieure de** f **sur** D est son plus petit majorant :

$$\sup_D f := \sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) \,:\, x \in D\} = \sup(\mathrm{Im}(f))\,.$$

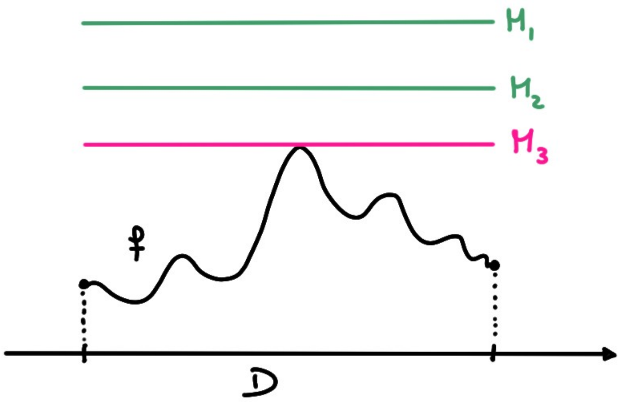
  Si f n'est pas majorée sur D, on pose $\sup_D f := +\infty$.

- ⋆ Si f est minorée sur D, la **borne inférieure de** f **sur** D est son plus grand minorant :

$$\inf_D f = \inf_{x \in D} f(x) = \inf\{f(x) \,:\, x \in D\} = \inf(\mathrm{Im}(f))\,.$$

  Si f n'est pas minorée sur D, on pose $\inf_D f := -\infty$.

Sur la figure ci-dessous, les nombres M_1, M_2 et M_3 sont tous des majorants pour f sur son domaine D. Le nombre M_3 étant le plus petit majorant (puisque tout nombre $M' < M_3$ ne majore plus f), c'est $\sup_D f$:



Remarque 6.29. ⋆ Si $f : D \to \mathbb{R}$ atteint son maximum en x^*, alors

$$\sup_{x \in D} f(x) = \max_{x \in D} f(x) = f(x^*)\,.$$

- ⋆ Si $f : D \to \mathbb{R}$ atteint son minimum en x_*, alors

$$\inf_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} f(x) = f(x_*)\,.$$

◇

Informel 6.30. Par les propriétés des réels, une fonction bornée possède *toujours* une borne supérieure et une borne inférieure ! Par contre, comme on sait, elle peut ne pas atteindre son maximum ou son minimum.

Exemple 6.31. La fonction

$$\begin{aligned} f :]0,3[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - x \end{aligned}$$

est majorée, car pour tout $x \in]0,3[$,

$$f(x) = x^2 - x \leqslant 3^2 - 0 = 9$$

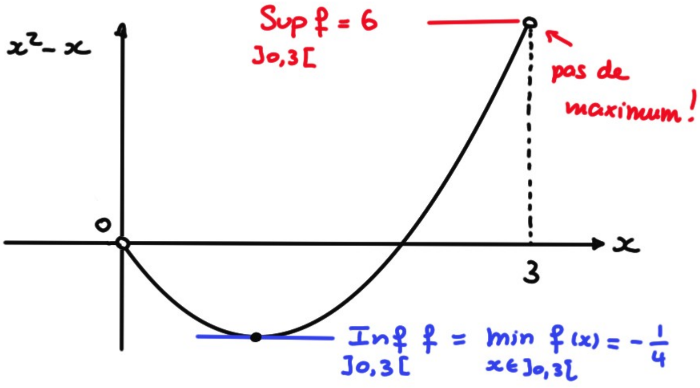
En fait, dans ce cas, ce majorant $M = 9$ n'est pas le plus petit, car

$$\sup_D f = 6\,.$$

Remarquons par contre qu'il n'existe aucun $x^* \in]0,3[$ tel que $f(x^*) = 6$, donc f n'a pas de maximum.
Remarquons ensuite que f est minorée car

$$f(x) = x^2 - x \geqslant 0^2 - 3 = -3\,.$$

Ici f atteint son minimum en $x_* = \frac{1}{2}$, $f(x_*) = -\frac{1}{4}$:



◇

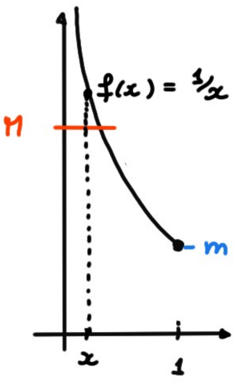
Exemple 6.32. La fonction

$$\begin{aligned} f :]0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est minorée car pour tout $x \in]0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{1} = 1 = m\,.$$

Mais elle n'est pas majorée, car pour tout $M \geqslant 1$ il existe $x \in]0,1]$ tel que $f(x) > M$:



(On peut par exemple prendre $x = \frac{1}{2M}$, pour lequel $f(x) = 2M > M$.) On a donc

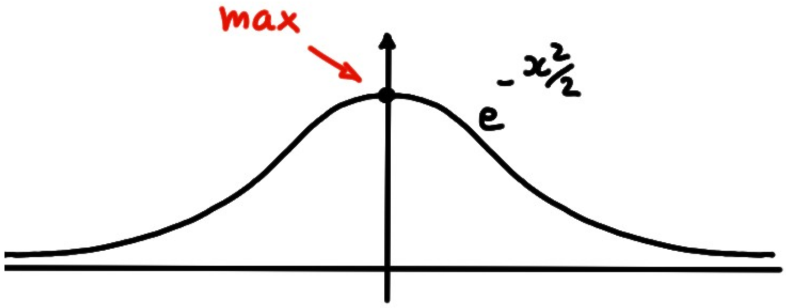
$$\sup_{]0,1]} f = +\infty\,.$$

Par contre,

$$\inf_{]0,1]} f = \min_{]0,1]} f = f(1) = 1\,.$$

◇

Exemple 6.33. Considérons encore $g(x) = e^{-x^2/2}$, sur $\mathbb{R}$.



On a vu que f atteint son maximum en $x^* = 0$

$$\sup_{\mathbb{R}} g = \max_{\mathbb{R}} g = g(0) = 1\,,$$

et on a vu qu'elle n'a pas de minimum. Pourtant, elle est minorée par 0 puisque $e^{-x^2/2} \geqslant 0$ pour tout x. Montrons que 0 est en fait la plus grand minorant. En effet, si on prend un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé, montrons qu'il existe au moins un réel x tel que $0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant \varepsilon$. En effet, on peut satisfaire cette condition en prenant $|x| > \sqrt{2|\log(\varepsilon)|}$. On conclut que

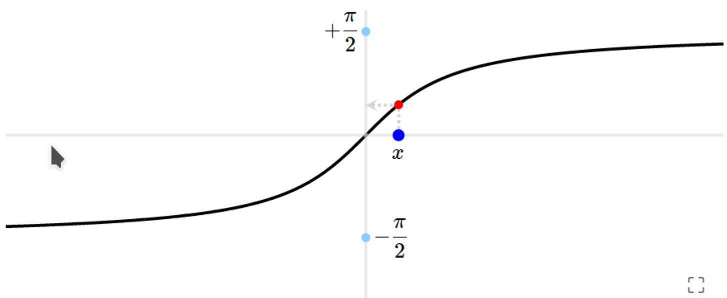
$$\inf_{\mathbb{R}} g = 0\,,$$

$\diamond$

Exemple 6.34. La fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

ne possède ni minimum, ni maximum :



Malgré tout,

$$\sup_{\mathbb{R}} h = +\frac{\pi}{2}\,, \qquad \inf_{\mathbb{R}} h = -\frac{\pi}{2}\,.$$

$\diamond$

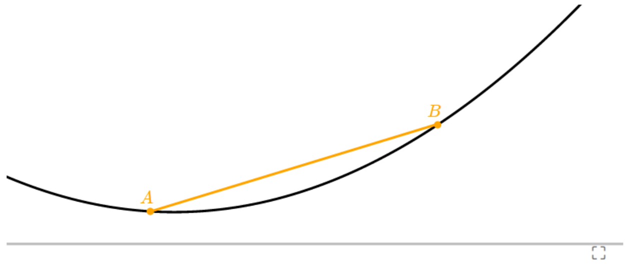
Lemme 19. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, et $A \subset D$.*

1) $\sup_A(-f) = -\inf_A f$
2) $\sup_A(f+g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g$
3) *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors* $\sup_A(\alpha f + \beta) = \alpha\big(\sup_A f\big) + \beta$
4) *Si $A \subset B \subset D$, alors* $\sup_A f \leqslant \sup_B f$, *et* $\inf_A \geqslant \inf_B f$.

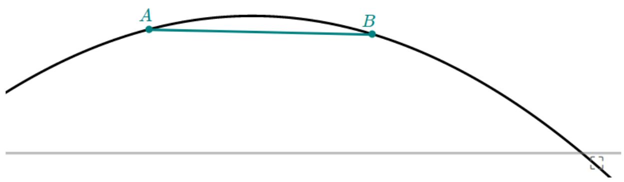
6.6 Convexité/concavité

La *convexité* est une propriété géométrique associée au graphe d'une fonction. Commençons par en donner une définition un peu informelle.

On dit qu'une fonction est **convexe** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont *au-dessus* du graphe,



et on dit qu'elle est **concave** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont *au-dessous* du graphe :



Remarque 6.35. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. ◇

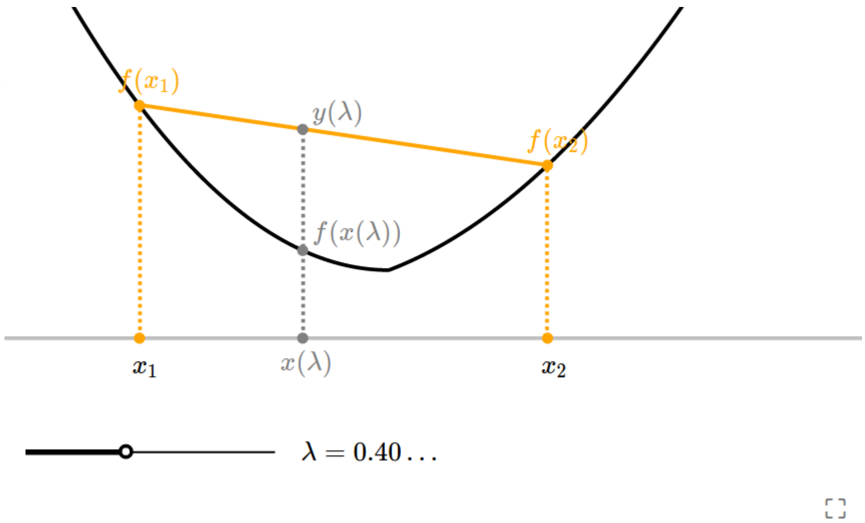
Pour définir analytiquement (plutôt que géométriquement) la convexité, il faut que nous décrivions précisément le segment reliant deux points du graphe.

Soit donc f une fonction donnée, et soient $x_1 < x_2$ deux réels. On peut paramétrer toutes les positions intermédiaires (sur l'axe réel) entre x_1 et x_2 à l'aide d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, en définissant

$$x(\lambda) := x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \,.$$

On a $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$, et toute autre valeur $0 < \lambda < 1$ représente un point intermédiaire : $x_1 < x(\lambda) < x_2$. Maintenant, le point sur le segment reliant $A = (x_1, f(x_1))$ à $B = (x_2, f(x_2))$, situé au-dessus de $x(\lambda)$, est à hauteur

$$y(\lambda) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \,.$$



Le segment est donc entièrement au-dessus du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \leqslant y(\lambda) \qquad \forall \lambda \in [0,1]\,,$$

et il est entièrement au-dessous du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \geqslant y(\lambda) \qquad \forall \lambda \in [0,1]\,,$$

Ceci mène à la définition analytique de convexité/concavité :

Définition 6.36. Soit I un intervalle, borné ou pas, et $f : I \to \mathbb{R}$.

⋆ f est **convexe** si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

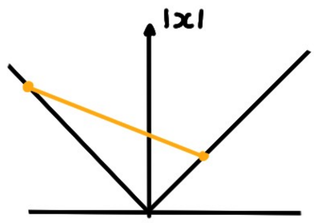
$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

⋆ f est **concave** si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

Exemple 6.37. $f(x) = |x|$ est convexe. En effet, fixons deux points quelconques $x_1 < x_2$. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) &= \big|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big| \\ &\leqslant \big|(1-\lambda)x_1\big| + \big|\lambda x_2\big| \\ &= (1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2| \\ &= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,. \end{aligned}$$



◇

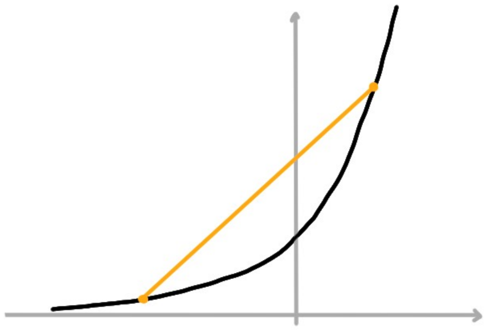
Exemple 6.38. $f(x) = x^2$ est convexe (sur tout $\mathbb{R}$). En effet,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &- (1-\lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) \\ &= \big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big)^2 - (1-\lambda)x_1^2 - \lambda x_2^2 \\ &= -\underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geqslant 0}(x_1 - x_2)^2 \\ &\leqslant 0\,. \end{aligned}$$

◇

La définition de convexité donnée ci-dessus traduit la propriété géométrique énoncée en début de section, mais elle peut être difficile à mettre en oeuvre, même dans des cas très simples.

Exemple 6.39. La connaissance du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ indique qu'elle est probablement convexe :



Mais montrer "à la main" que

$$e^{(1-\lambda)x_1+\lambda x_2} \leqslant (1-\lambda)e^{x_1} + \lambda e^{x_2} \qquad \forall x_1 < x_2\,, \forall \lambda \in [0,1]$$

n'est pas simple. ◇

Il serait donc utile d'avoir un moyen plus direct d'obtenir la convexité. Nous y reviendrons après avoir les outils fournis par le calcul différentiel.