Chapitre 8

Fonctions continues

8.1 Définition de la continuité

La *continuité* est la condition de régularité la plus naturelle que l'on puisse associer à une fonction f en un point x_0 : elle impose que les valeurs de $f(x)$, pour x dans un petit voisinage de x_0 soient proches de la valeur de $f(x_0)$. Cette condition se formule rigoureusement en utilisant une limite :

Définition 8.1. Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert, et soit $x_0 \in D$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

on dit que f est **continue en** x_0. Si la limite n'existe pas, ou si elle existe mais est différente de $f(x_0)$, on dit qu'elle est **discontinue en** x_0.

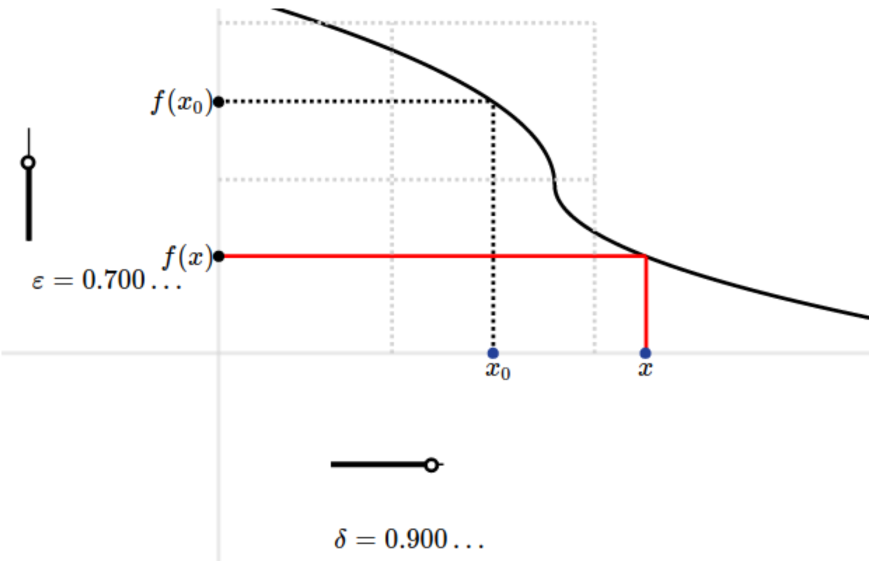
Si une fonction est continue en tout point $x_0 \in D$, on dira simplement qu'elle est **continue sur** D.

La continuité d'une fonction f en un point x_0 signifie que les valeurs de $f(x)$ sont proches de $f(x_0)$ pour tous les points x proches de x_0. Très exactement : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$

Sur l'animation suivante, choisir un x_0 et tester la continuité de f en x_0, en procédant comme suit :

1) Fixer une valeur de $\varepsilon > 0$ (petite),
2) Chercher un $\delta > 0$ adapté tel que la relation ci-dessus soit satisfaite. Remarquer que plus ε est pris petit, plus δ doit aussi être pris petit pour satisfaire cette contrainte.



Exemple 8.2. Étudions la continuité de la fonction

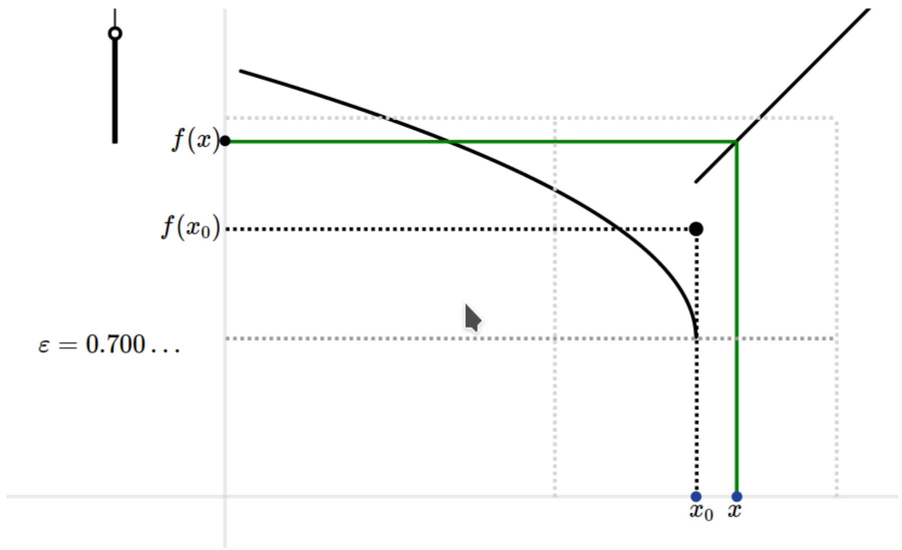
$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,, \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 3\,, \\ x-2 & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$$

Montrons d'abord que f est continue en tout point $x_0 \neq 3$:

1) Si $x_0 < 3$, alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\sqrt{4-x}) = \sqrt{4-x_0} = f(x_0)\,.$$

2) Si $x_0 > 3$, alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x-2) = x_0 - 2 = f(x_0)\,.$$

Considérons ensuite le cas $x_0 = 3$. D'une part, en ce point la fonction prend la valeur $f(3) = 3/2$, mais d'autre part
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (\sqrt{4-x}) = 1\,,$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x-2) = 1\,,$$
ce qui implique l'existence de $\lim_{x \to 3} f(x)$, mais
$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)\,,$$
donc f est discontinue en $x_0 = 3$. ◇



L'exemple précédent montre comme il est facile de créer une discontinuité en un point x_0 : en définissant la fonction différemment de part et d'autre de x_0.

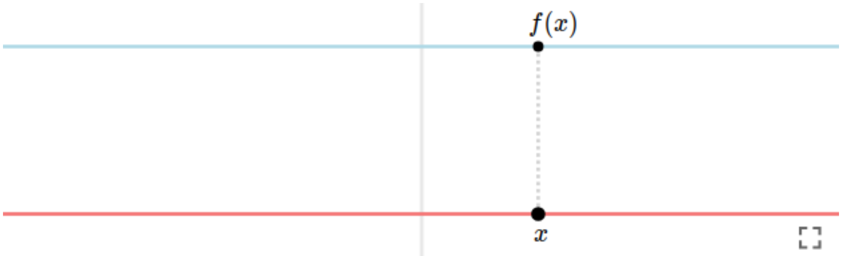
Informel 8.3. Les fonctions qui sont continues *en tout point de leur domaine de définition*, sur lesquelles nous reviendrons, jouent un rôle particulier en analyse, car elle jouissent de certaines propriétés remarquables. Du point de vue graphique, le graphe d'une telle fonction ne présente *aucun saut*, et peut théoriquement être tracé "sans lever le crayon".

8.1.1 Des fonctions avec beaucoup de discontinuités

En vue de l'exemple du début de cette section, on voit qu'il est facile de créer des fonctions possédant une, deux ou plusieurs discontinuités. On peut évidemment créer des fonctions possédant une infinité de discontinuités (par exemple, la valeur entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$), mais il existe des fonctions qui ne sont continues *nulle part*...

Exemple 8.4. Considérons la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



(Un ordinateur ne peut évidemment pas représenter le graphe d'une telle fonction.)

Montrons que f est discontinue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, pour un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, il existe toujours une suite d'irrationnels $i_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(i_n) = 0\,,$$

et une suite de rationnels $r_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = 1\,.$$

Ceci implique que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to x_0$, et donc que f n'est pas continue en x_0. Comme ce raisonnement vaut pour tout x_0, f est discontinue partout. ◇

En bas de page, on donne un exemple d'une fonction qui est discontinue "presque partout", dans le sens suivant : continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel.

8.1.2 Continuité des fonctions élémentaires

Lemme 22. *Les fonctions qui sont des sommes, produits, quotients (lorsqu'ils sont bien définis) et composées de fonctions continues sont continues.*

Preuve: Ces propriétés suivent directement des propriétés de la limite. Par exemple, si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ est aussi continue en x_0 puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f+g)(x_0) \end{aligned}$$

□

La plupart des fonctions fondamentales de l'analyse sont continues (sur leur domaine).

- ⋆ Tout **polynôme** $x \mapsto P(x)$ est continu sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ Les **fonctions trigonométriques** $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; $\tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- ⋆ Pour toute base $a > 0$, **l'exponentielle** a^x est continue sur $\mathbb{R}$. (En particulier, $x \mapsto e^x$ est continue.)
- ⋆ Pour toute base $a > 0$, la fonction **logarithme** $\log_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (En particulier, $x \mapsto \log(x)$ est continue.)

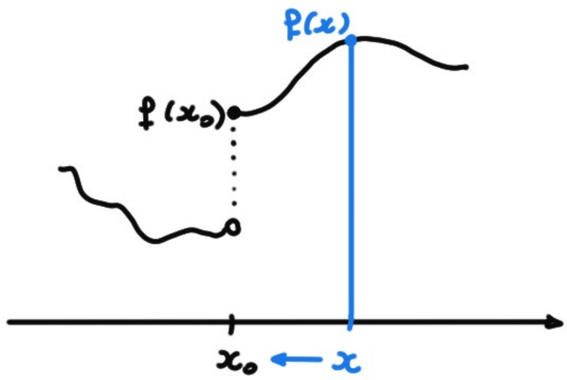
8.1.3 Continuité latérale

Introduisons une notion de continuité un peu plus faible :

Définition 8.5. 1) Soit f une fonction définie en x_0 et dans un voisinage à gauche de x_0. On dit que f est **continue à gauche en** x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2) Soit f une fonction définie en x_0 et dans un voisinage à droite de x_0. On dit que f est **continue à droite en** x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Une fonction continue à droite, mais pas à gauche, en x_0 :



Exemple 8.6. Étudions la continuité de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{3}\,, \\ 1/6 & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x^2+x}{\sin(3x)} & \text{si } -\frac{\pi}{3} < x < 0\,, \end{cases}$$

au point $x_0 = 0$. Puisque f est définie différemment de part et d'autre de 0, on étudie les limites latérales :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \frac{x+1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Puisque $f(0) = \frac{1}{6}$, on conclut qu'en 0, f est continue à droite mais discontinue à gauche. ⋄

Théorème 8.7. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Alors f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

Preuve: Est une conséquence de l'équivalence entre limite et égalité des limites latérales. □

Attention : ne manquez pas de lire l'exemple tout en fin de section !

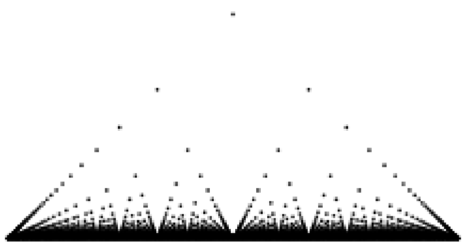
Exemple 8.8. ⚠ Considérons la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (irréductible).} \end{cases}$$

Par exemple,

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,, \qquad f(\tfrac{3}{5}) = \tfrac{1}{5}\,, \qquad f(\tfrac{12}{39}) = f(\tfrac{4}{13}) = \tfrac{1}{13}\,.$$

Le graphe de f ressemble à quelque chose comme ça :



Nous allons montrer que f *est continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel*.

Clairement, f est discontinue en tout x_0 rationnel non-nul. En effet, on peut toujours trouver une suite d'irrationnels $i_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(i_0) = 0 \neq f(x_0)\,.$$

Avant de poursuivre, définissons pour chaque entier $k \geqslant 1$ l'ensemble

$$\mathbb{Q}(k) := \left\{ \tfrac{p}{k} \,|\, \text{irréductible, } p \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}\,.$$

Remarquons que la distance entre deux points de $\mathbb{Q}(k)$ est d'au moins $\frac{1}{k}$. Par définition, si $x \in \mathbb{Q}(k)$, alors $f(x) = \frac{1}{k}$.

Fixons maintenant un irrationnel x_0, et montrons que f est continue en x_0, c'est-à-dire que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0\,.$$

Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un entier $k \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$. Soit $\delta > 0$, assez petit pour que les rationnels contenus dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne soient que des rationnels des ensembles $\mathbb{Q}(k')$, $k' > k$.

- ⋆ Si x est irrationnel, alors $f(x) = 0$.
- ⋆ Si x est rationnel, alors il appartient nécessairement à un des ensemble $\mathbb{Q}(k')$, $k' > k$, ce qui implique $|f(x)| = \frac{1}{k'} < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. ◇

8.2 Prolongement par continuité

Informel 8.9. Supposons qu'une fonction ait un "trou" dans son domaine, au point x_0. Si l'on veut étendre le domaine de cette fonction, de façon à ce que son domaine contienne aussi x_0, comment doit-on définir $f(x_0)$?

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et soit $I' := I \setminus \{x_0\}$. On obtient donc I en rajoutant à I' le point x_0.

Soit maintenant une fonction $f : I' \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire définie sur I à l'exception du point x_0.

Si on veut étendre le domaine de f à tout I, il faut choisir une valeur pour $f(x_0)$. Ce choix est a priori arbitraire, mais une façon naturelle de le faire est de donner à f, au point x_0, une valeur *qui est semblable à celles qu'elle prend dans le voisinage de* x_0.

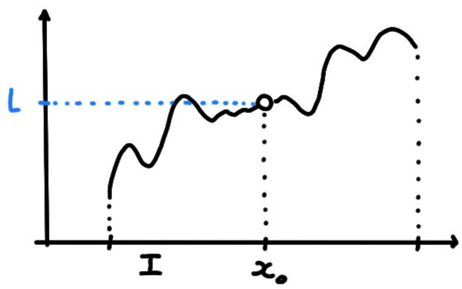
Plus précisément : si le nombre

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe, il est naturel de l'utiliser pour définir la valeur de f au point x_0 :

$$f(x_0) := L\,.$$

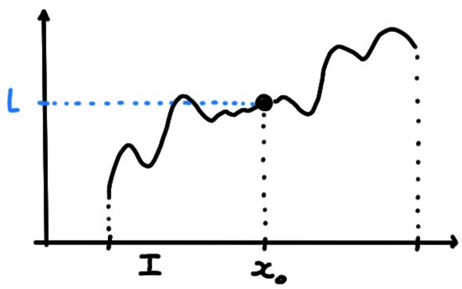
Cette procédure est surtout utilisée dans le cas où f est, au départ, continue en tout point de I' :



Si la limite L existe, la nouvelle fonction

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0\,, \\ L & \text{si } x = x_0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en tout point de I ; elle s'appelle la **prolongée de f par continuité** :



Informel 8.10. Du point de vue du graphe, on est parti d'une fonction qui était déjà continue en tous les points de I', et l'existence de L a permis de simplement "boucher le trou", pour rendre la fonction continue sur tout I.

Exemple 8.11. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,, \\ x-2 & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$$

On a montré précédemment que f est continue en tout point $x \neq 3$. On a aussi calculé

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1\,.$$

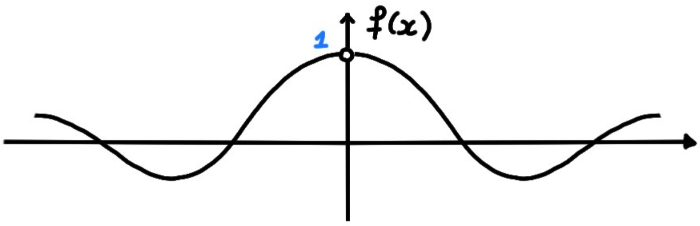
On peut donc prolonger cette fonction par continuité à tout $\mathbb{R}$, en définissant

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,, \\ 1 & \text{si } x = 3\,, \\ x-2 & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$$

◇

Exemple 8.12. Considérons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}\,.$$



Clairement, f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On sait que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

donc f peut être prolongée par continuité à tout $\mathbb{R}$. Sa prolongée est donnée par

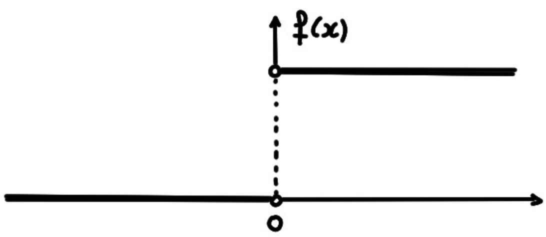
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

◇

Informel 8.13. On ne peut pas toujours, comme dans les deux exemples précédents, "boucher le trou" pour rendre une fonction continue partout :

Exemple 8.14. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$



Alors f est continue en tout point de $\mathbb{R}_*$, Mais comme $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas (puisque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ est différent de $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$), cette fonction ne *peut pas être prolongée* par continuité. ◇

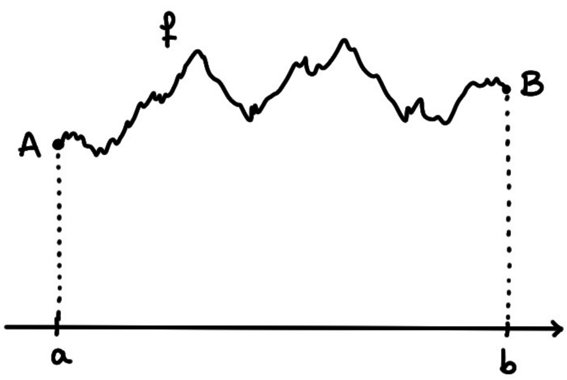
8.3 Continuité sur un intervalle compact

Une fonction continue définie sur un intervalle **compact**, c'est-à-dire fermé et borné (donc du type $[a,b]$), possède plusieurs propriétés remarquables. Commençons par définir ce que signifie être continue sur un intervalle fermé et borné :

Définition 8.15. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue** si

- $\star$ elle est continue en tout $x_0 \in]a,b[$,
- $\star$ elle est continue à droite en $x_0 = a$,
- $\star$ elle est continue à gauche en $x_0 = b$.

Informel 8.16. Une fonction continue sur $[a,b]$ est donc une fonction dont le graphe est une courbe "traçable sans lever le crayon", reliant le point $A = (a, f(a))$ au point $B = (b, f(b))$:



Une première propriété importante est qu'une fonction continue sur un compact ne peut pas prendre de valeurs arbitrairement grandes :

Théorème 8.17. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée.*

Preuve: Par l'absurde, supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n > 0$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$, et donc $f(x_n) \to +\infty$.

Par construction, $(x_n)_n$ est bornée. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ et $x^* \in [a,b]$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Mais donc, puisque f est continue, elle est en particulier continue en x^*, et donc

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty\,,$$

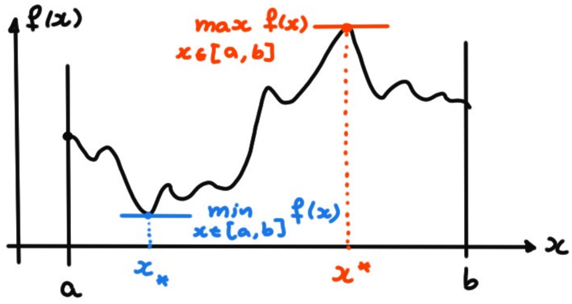
ce qui est impossible (puisque $f(x^*)$ doit être un nombre fini !). Donc f est majorée.

En adaptant l'argument, on montre que f est minorée. □

Une deuxième propriété, très utile dans les problèmes d'optimisation : si une fonction est continue sur un compact, elle atteint toujours son minimum et son maximum :

Théorème 8.18. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son minimum et son maximum : il existe x_* et $x^* \in [a,b]$ tels que*

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_*)\,, \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x^*)\,.$$



Preuve: Par le théorème précédent, f est bornée, et donc

$$s := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

est bien défini. Nous allons montrer qu'il existe un point $x^* \in [a,b]$ où f prend cette valeur s.

Considérons la suite $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$. Par définition du supremum, pour tout n il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$s - \varepsilon_n \leqslant f(x_n) \leqslant s\,.$$

Par construction, $f(x_n) \to s$ lorsque $n \to \infty$. Mais, comme $(x_n)_n$ est bornée (elle vit dans $[a,b]$!), le Théorème de Bolzano-Weierstrass garantit qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$, et un $x^* \in [a,b]$, tels que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$.

Calculons $f(x^*)$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est en particulier continue en x^*. Comme $x_{n_k} \to x^*$, on a donc

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\,.$$

Mais, puisque $(f(x_{n_k}))_k$ est une sous-suite de $(f(x_n))_n$, elle converge vers la même limite :

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s\,.$$

On a donc

$$f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

On procède de même pour la construction d'un point x_* où f atteint son minimum. □

Informel 8.19. Le théorème dit que x_* et x^* existent toujours, mais il ne dit pas comment les trouver ! (D'ailleurs en général, on ne sait pas les trouver.)

Exemple 8.20. Considérons $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = x^3 \sin(x^2 + \cos(x))\,.$$

Cette fonction est continue (c'est un produit de x^3 avec une composée de fonctions continues), donc par le théorème, il existe $x_* \in [0,2]$ et $x^* \in [0,2]$ tels que

$$f(x_*) = \min_{x\in[0,2]} f(x)\,, \qquad f(x^*) = \max_{x\in[0,2]} f(x)\,.$$

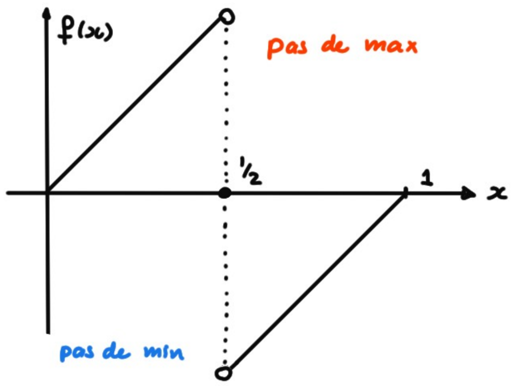
◇

Pour souligner l'importance des hypothèses dans le théorème ci-dessus, voyons comme le résultat n'est plus vrai en général lorsqu'une des hypothèses n'est pas vérifiée :

Exemple 8.21. (Une fonction sur un intervalle compact, mais qui n'est pas continue en un point.) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}\,, \\ x-1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

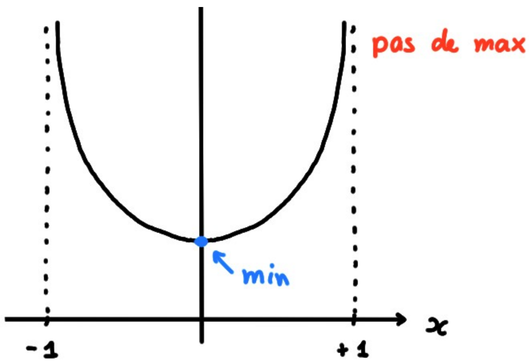
Cette fonction est continue partout sauf en $\frac{1}{2}$, et elle ne possède ni de maximum ni de minimum : ◇



Exemple 8.22. (Une fonction continue, sur un intervalle borné mais pas fermé.) Considérons

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\,, \qquad \text{sur }]-1,1[\,.$$

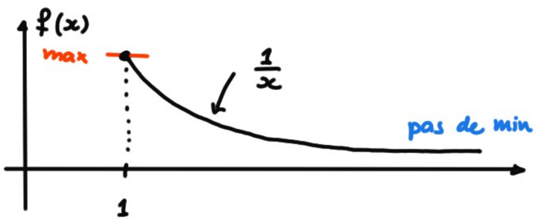
Alors f possède un minimum, atteint en $x_* = 0$, mais pas de maximum : ◇



Exemple 8.23. (Une fonction continue sur un intervalle fermé mais pas borné.) Soit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad \text{sur } [1,+\infty[\,.$$

Alors f possède un maximum, atteint sur le bord en $x^* = 1$, mais pas de minimum :



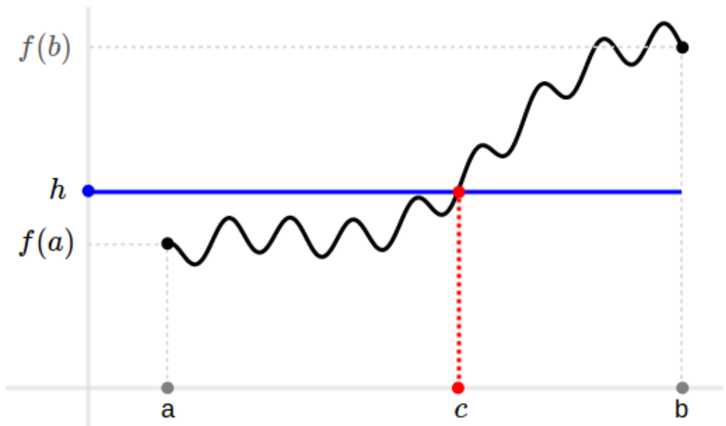
◇

8.4 Le théorème de la valeur intermédiaire

(ici, Video: v_fonctions_continuite_TVI.mp4)

Une propriété essentielle des fonctions continues sur un intervalle compact :

Théorème 8.24. *(Théorème de la valeur intermédiaire) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) < f(b)$, alors pour toute valeur intermédiaire h, $f(a) < h < f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$. (Affirmation semblable dans le cas où $f(a) > f(b)$.)*



Le résultat se démontre en utilisant un **Algorithme de bissection** (qui est, en soi, tout aussi important que le théorème lui-même) :

Preuve: L'idée est de construire deux suites convergentes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Celles-ci sont construites par récurrence :

1) Posons $a_0 := a$, $b_0 := b$. Par définition, $f(a_0) < h < f(b_0)$.
2) Pour $n \geqslant 0$, supposons que a_n et b_n ont déjà été définis, et que $f(a_n) \leqslant h \leqslant f(b_n)$. Considérons alors le point milieu de a_n et b_n :
$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$
   - ⋆ Si $f(c_n) \leqslant h$, on pose $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$.
   - ⋆ Si $f(c_n) > h$, on pose $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$. Par définition de a_{n+1} et b_{n+1}, $f(a_{n+1}) \leqslant h \leqslant f(b_{n+1})$.

Maintenant que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ ont été construites, regardons-les de plus près :

- ⋆ À chaque étape de l'algorithme ci-dessus, a_{n+1} est soit a_n, soit c_n. Comme $c_n > a_n$, ceci implique que dans tous les cas, $a_{n+1} \geqslant a_n$. De plus, chaque a_n est inférieur à b. Par conséquent, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée, donc elle converge : notons sa limite
$$c_- := \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$
- ⋆ À chaque étape de l'algorithme ci-dessus, b_{n+1} est soit b_n, soit c_n. Comme $c_n < b_n$, ceci implique que dans tous les cas, $b_{n+1} \leqslant b_n$. De plus, chaque b_n est supérieur à a. Par conséquent, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée, donc elle converge : notons sa limite
$$c_+ := \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$
- ⋆ Comme à chaque étape exactement un des points devient le point milieu, on a
$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}|a-b| \to 0\,.$$
Par l'inégalité triangulaire, on a donc que
$$|c_- - c_+| \leqslant |c_- - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - c_+| \to 0\,,$$
ce qui implique que $c_- = c_+$, que l'on peut donc écrire simplement c.

On utilise maintenant de manière essentielle la continuité de f :

1) D'une part, comme $a_n \to c_-$ et $f(a_n) \leqslant h$ pour tout n, on a que

$$f(c) = f(c_-) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant h\,.$$

2) D'autre part, comme $b_n \to c_+$ et $f(b_n) \geqslant h$ pour tout n, on a que

$$f(c) = f(c_+) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant h\,.$$

Ceci implique bien que $f(c) = h$. □

8.4.1 Application : existence de solutions pour des équations non-linéaires

Voyons une première conséquence du théorème de la valeur intermédiaire, que l'on a déjà rencontrée. (Dans le chapitre sur les nombres complexes, on a vu ce résultat comme une conséquence du Théorème Fondamental de l'Algèbre.)

Corollaire 9. *(Existence de racines pour polynômes réels de degré impair) Un polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.*

Preuve: Considérons un polynôme de degré impair, à coefficients réels :

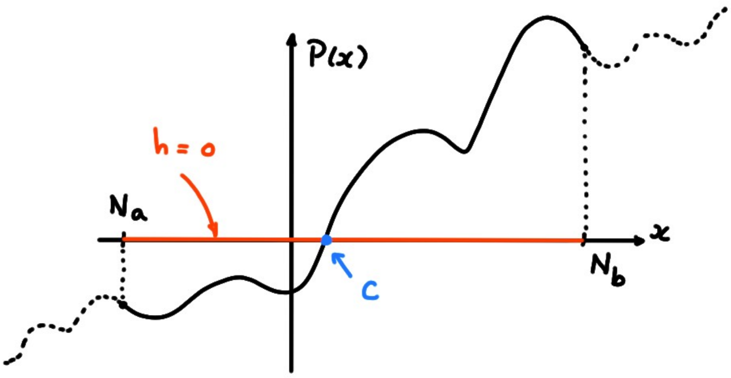
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

où n est impair, et $a_n \neq 0$. Rappelons que ce polynôme est une fonction continue de la variable x.

Sans perte de généralité, supposons que $a_n > 0$. Comme n est impair, on a

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty\,.$$

Il existe donc un réel $N_a < 0$ tel que $P(N_a) < 0$, et un réel $N_b > 0$ tel que $P(N_b) > 0$.



En appliquant le Théorème de la valeur intermédiaire sur l'intervalle $[N_a, N_b]$, avec $h = 0$, on conclut : il existe $c \in]N_a, N_b[$ tel que $P(c) = 0$. □

Exemple 8.25. Le polynôme

$$P(z) = z^7 - \pi z^6 + \sqrt{2} z - 1$$

est de degré impair. Par le corollaire, il possède au moins une racine. ◇

Le théorème de la valeur intermédiaire permet aussi de montrer l'existence de solutions pour des équations non-linéaires, pas forcément polynomiales :

Exemple 8.26. Montrons que l'équation non-linéaire

$$\cos(x) = x$$

possède au moins une solution : Pour ce faire, définissons

$$f(x) := \cos(x) - x\,,$$

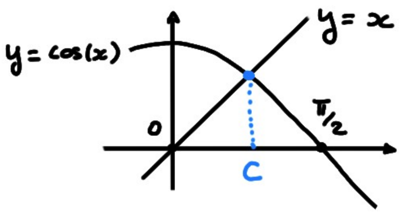
que l'on considère sur l'intervalle fermé et borné $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a d'une part que

$$f(0) = 1 - 0 = 1 > 0\,,$$

et d'autre part que

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 - \tfrac{\pi}{2} < 0\,.$$

Donc, par le Théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(c) = 0$, ce qui est équivalent à $\cos(c) = c$.

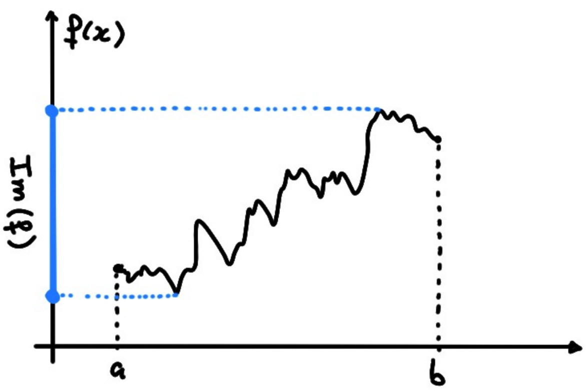


◇

8.4.2 Application : sur l'ensemble image d'une fonction continue

Théorème 8.27. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors son ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle fermé et borné, donné par*

$$\mathrm{Im}(f) = \Big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\Big]$$



Preuve: On sait que f atteint son minimum et son maximum :

$$f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,, \qquad f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Puisque $f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$ pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\mathrm{Im}(f) \subset [f(x_*), f(x^*)]\,.$$

Si $x_* = x^*$, alors f est constante et donc $\mathrm{Im}(f)$ ne contient qu'un point (qu'on peut considérer comme un intervalle fermé et borné). Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $x_* < x^*$.

En choisissant un $h \in [f(x_*), f(x^*)]$ quelconque, le théorème de la valeur intermédiaire garantit qu'il existe un $c \in]x_*, x^*[$ tel que $f(c) = h$. Par conséquent, $h \in \mathrm{Im}(f)$, et donc

$$[f(x_*), f(x^*)] \subset \mathrm{Im}(f)\,.$$

On a donc montré que $\mathrm{Im}(f) = [f(x_*), f(x^*)]$, qui est bien un intervalle fermé et borné. □

8.5 Continuité et calcul de limites

On a déjà vu que si une fonction f est continue en un point x_*, alors pour toute suite (x_n) tendant vers x_*,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(x_*).$$

Voyons maintenant un résultat analogue, mais dans lequel la suite x_n (dont la variable est l'entier n) est remplacée par une fonction $g(x)$ (dont la variable est un réel x) :

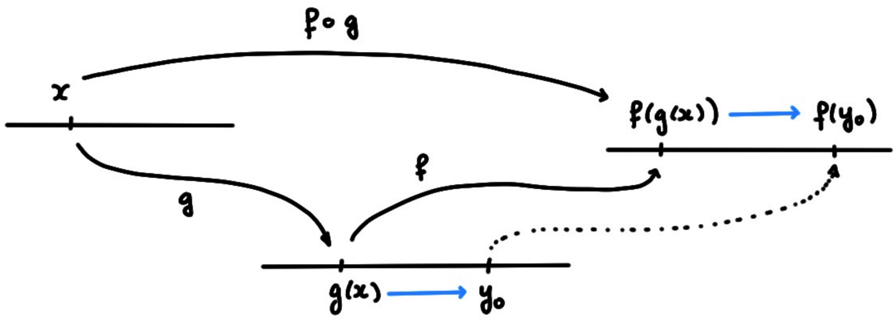
Théorème 8.28. *Soit $f(y)$ définie dans le voisinage d'un point $y_0 = L$, et continue en ce point y_0.*

1) *Si g est définie dans un voisinage de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)\,.$$

2) *Si g est définie sur un domaine contenant un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, et si $\lim_{x\to\infty} g(x) = y_0$, alors*

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f(y_0)\,.$$



Preuve: On démontre la première affirmation.

Fixons $\varepsilon > 0$. On procède en deux étapes :

- ⋆ Puisque f est continue en y_0, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(y_0)| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |y - y_0| \leqslant \eta$.
- ⋆ Ensuite, puisque $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - y_0| \leqslant \eta$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.

Prenons donc un x tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. En utilisant la première étape avec $y = g(x)$, on a

$$|f(g(x)) - f(y_0)| = |f(y) - f(y_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ceci montre bien que $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$.

La deuxième affirmation se démontre de la même façon. □

Informel 8.29. En d'autres termes, lorsqu'on étudie une limite d'une composée $f(g(x))$, dans laquelle on sait que $g(x) \to y_0$, **et que f est continue au point** y_0, alors on peut "rentrer la limite dans f" :

$$\lim f(g(x)) = f\big(\lim g(x)\big) = f(y_0)\,.$$

Exemple 8.30. Considérons la limite

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,.$$

On voit ici que $g(x) = \frac{x}{x+1} \to 1$ lorsque $x \to \infty$. Montrons que $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en $y_0 = 1$. En effet, puisque

$$|f(x) - f(1)| = |\sqrt{x} - \sqrt{1}| = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \leqslant |x-1|\,,$$

on a bien que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

On peut donc “rentrer la limite dans f”

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}} = \sqrt{1} = 1\,.$$

$\diamond$