Chapitre 10

Développements limités

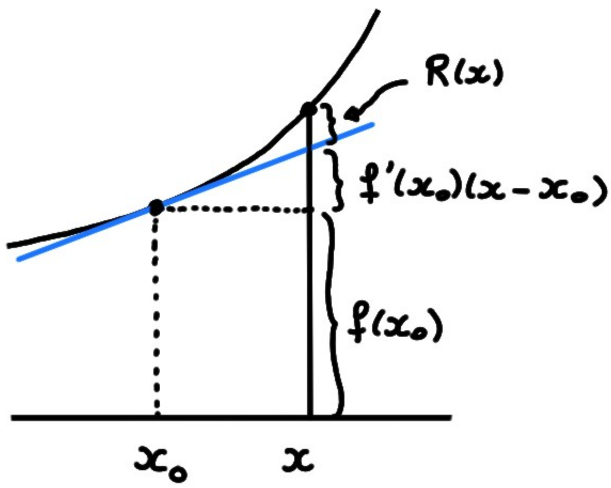
10.1 Introduction

(ici, Video: v_DL_intro.mp4)

Rappelons que la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 permet de la représenter au voisinage de ce point :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (f'(x_0) + r_{x_0}(x))(x - x_0) \\ &= \underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{\text{ordre zéro}} + f'(x_0)(x - x_0)}_{1^{er}\ ordre} + \underbrace{r_{x_0}(x)(x - x_0)}_{=R(x),\text{ reste}}, \end{aligned}$$

où $\lim_{x \to x_0} r_{x_0}(x) = 0$.



Cette dernière expression doit être lue de la façon suivante : pour un x proche de x_0, $f(x)$ se calcule en prenant

1) sa valeur en x_0, $f(x_0)$, à laquelle il faut rajouter...
2) une correction linéaire en $x - x_0$, $f'(x_0)(x - x_0)$, à laquelle on rajoute encore...
3) un **reste** $R(x) = (x - x_0)r_{x_0}(x)$.

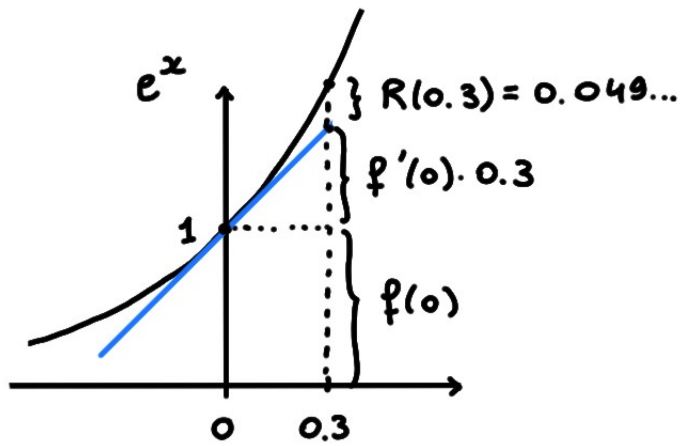
La somme des trois termes donne *exactement* $f(x)$, et ils sont en ordre *décroissant* d'importance (voir la figure ci-dessus) : la correction linéaire est petite puisque $x - x_0$ est petit, et le reste est petit puisque $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$. Mais en fait le reste est beaucoup plus petit que la correction linéaire, puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0\,.$$

Informel 10.1. En d'autres termes, $R(x)$ est "doublement" petit, puisque c'est le produit de $x - x_0$ (qui est petit lorsque x est proche de x_0) par $r_{x_0}(x)$ (qui est aussi petit lorsque x est proche de x_0).

Exemple 10.2. Considérons $f(x) = e^x$, au voisinage du point $x_0 = 0$. Si on s'intéresse par exemple au point $x = 0.3$, on obtient

$$f(0.3) = \underbrace{f(0)}_{1} + \underbrace{f'(0)0.3}_{0.3} + \underbrace{0.3r_0(0.3)}_{0.0498...} = 1.3498\ldots$$



◇

Une question naturelle est de savoir si il est possible d'obtenir une approximation de la fonction qui aille au-delà de l'approximation linéaire (et de son reste) : pour un point fixé $x \neq x_0$, peut-on approximer $f(x)$ à l'aide d'une expression qui soit plus précise que l'approximation linéaire ?

La première amélioration naturelle serait une approximation *quadratique* (du deuxième ordre), qui du point de vue graphique consiste à approximer le graphe, localement, par une parabole plutôt que par une droite. Une telle approximation, si elle existe, est plus précise puisqu'elle doit tenir compte de la *courbure* du graphe dans le voisinage du point.

Après l'approximation quadratique, on pourra essayer de produire une approximation cubique, et ainsi de suite, on pourra considérer des approximations d'ordres de plus en plus grand, à l'aide de *polynômes*. C'est le but de ce chapitre que de présenter cette construction, et de donner des conditions sur f qui garantissent que ces approximations sont possibles.

Informel 10.3. Certaines formules/expressions, dans ce chapitre, sont assez longues. On pourra donc augmenter la largeur du texte visible avec les boutons "+" et "−" dans la barre ci-dessus.

10.2 Définition et unicité

Un *développement limité* permet de représenter une fonction au voisinage d'un point x_0, à l'aide d'un *polynôme* :

$$f(x) = \text{polynôme}(x) + R(x)\,.$$

Le polynôme approximera bien la fonction dans le sens où la valeur du reste $R(x)$ doit être négligeable proche de x_0, dans un sens très précis :

Définition 10.4. Soit f définie au voisinage de x_0. On appelle **développement limité d'ordre** n **de** f **autour de** x_0 une représentation de $f(x)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)\,,$$

où

- $\star$ les $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sont des coefficients (constants), et le polynôme

  $$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

  est appelé **partie principale** du développement, et
- $\star$ le **reste** $R(x)$ est de la forme

  $$R(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)\,,$$

  où $\varepsilon(x)$ est une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0, telle que

  $$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Remarque 10.5. $\star$ Remarquons que dans le cas $n = 1$, la partie principale n'est autre que la droite tangente en x_0, et dans le reste $R(x) = (x - x_0)\varepsilon(x)$, la fonction $\varepsilon(x)$ représente $r_{x_0}(x)$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=a_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{=a_1}(x - x_0) + \underbrace{(x - x_0)r_{x_0}(x)}_{=R(x)}$$

- $\star$ On évitera de trop alourdir l'écriture, en omettant d'indiquer la dépendance de $R(x)$ et $\varepsilon(x)$ en f, n, et x_0 (une notation plus précise serait $R_{f,x_0,n}(x)$, $\varepsilon_{f,x_0,n}(x)$).
- $\star$ Il est important, la plupart du temps, de souligner que *plus x est proche de x_0, plus le reste devient négligeable par rapport à la partie principale*! Plus précisément, **le reste est toujours plus petit que le terme de la partie principale de plus grand degré**. En effet, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n$,

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{n-k}\varepsilon(x) = 0\,.$$

  C'est pour cette raison que la partie principale fournit une bonne approximation de la fonction au voisinage de x_0.
- $\star$ Dans la suite, pour abbréger "développement limité d'ordre n", on écrira simplement "$DL(n)$".

$\diamond$

La façon très précise dont le $DL(n)$ a été défini a une première conséquence importante : lorsqu'il existe, il est unique.

Lemme 27. *Si f possède un $DL(n)$ autour de x_0, alors les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ et la fonction $\varepsilon(x)$ et sont uniques.*

Preuve: Supposons que f possède un $DL(n)$ en x_0, et qu'il y ait deux façons de l'écrire, la première étant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_1(x)\,,$$

la deuxième étant

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_2(x)\,,$$

En prenant $x \to x_0$, on a donc d'une part

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0\,,$$

et d'autre part

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b_0\,,$$

ce qui implique $a_0 = b_0$. Ensuite, remarquons que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} &\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\big(a_1 + \underbrace{a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}+(x-x_0)^{n-1}\varepsilon_1(x)}_{\to 0}\big)\\ &= a_1\,,\end{aligned}$$

qui puisque $a_0 = b_0$ est aussi égale à

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} &\frac{f(x)-b_0}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\big(b_1 + \underbrace{b_2(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^{n-1}+(x-x_0)^{n-1}\varepsilon_2(x)}_{\to 0}\big)\\ &= b_1\,,\end{aligned}$$

donc $a_1 = b_1$. En procédant ainsi, on montre ensuite que $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, ..., $a_n = b_n$. Finalement,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x) &= \frac{f(x)-\big\{a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n\big\}}{(x-x_0)^n}\\ &= \frac{f(x)-\big\{b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n\big\}}{(x-x_0)^n}\\ &= \varepsilon_2(x)\,.\end{aligned}$$

(Donc le reste, est une fonction en général compliquée, mais que l'on peut toujours exprimer explicitement à l'aide de $f(x)$ et de la partie principale.) □

Informel 10.6. On utilisera ce dernier résultat souvent dans ce qui suit : *dès que* l'on peut écrire une fonction f, au voisinage d'un point x_0, comme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n\,,$$

où $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$, c'est qu'on a trouvé *le* (= l'unique) $DL(n)$ de f autour de x_0.

Exemple 10.7. Reprenons $f(x) = e^x$ au voisinage de $x_0 = 0$. On sait que

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)\,,$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Ceci représente un $DL(1)$ en $x_0 = 0$.

Montrons maintenant que cette fonction possède un $DL(2)$ en 0, donné par

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\,.$$

(Attention : la fonction $\varepsilon(x)$, ici, n'est pas la même que celle de la ligne précédente !) Pour ce faire exprimons, explicitement en fonction de x,

$$\varepsilon(x) = \frac{e^x - \{1 + x + \frac{x^2}{2}\}}{x^2}$$

(cette fonction est effectivement définie dans un voisinage épointé de $x_0 = 0$), et calculons

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \{1 + x + \frac{1}{2}x^2\}}{x^2}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \{1+x\}}{2x}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \{1\}}{2}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Par le théorème d'unicité, ceci implique que l'expression ci-dessus est bien le $DL(2)$. ◇

(ici, Video: v_DL_voir_DL_exp.mp4)

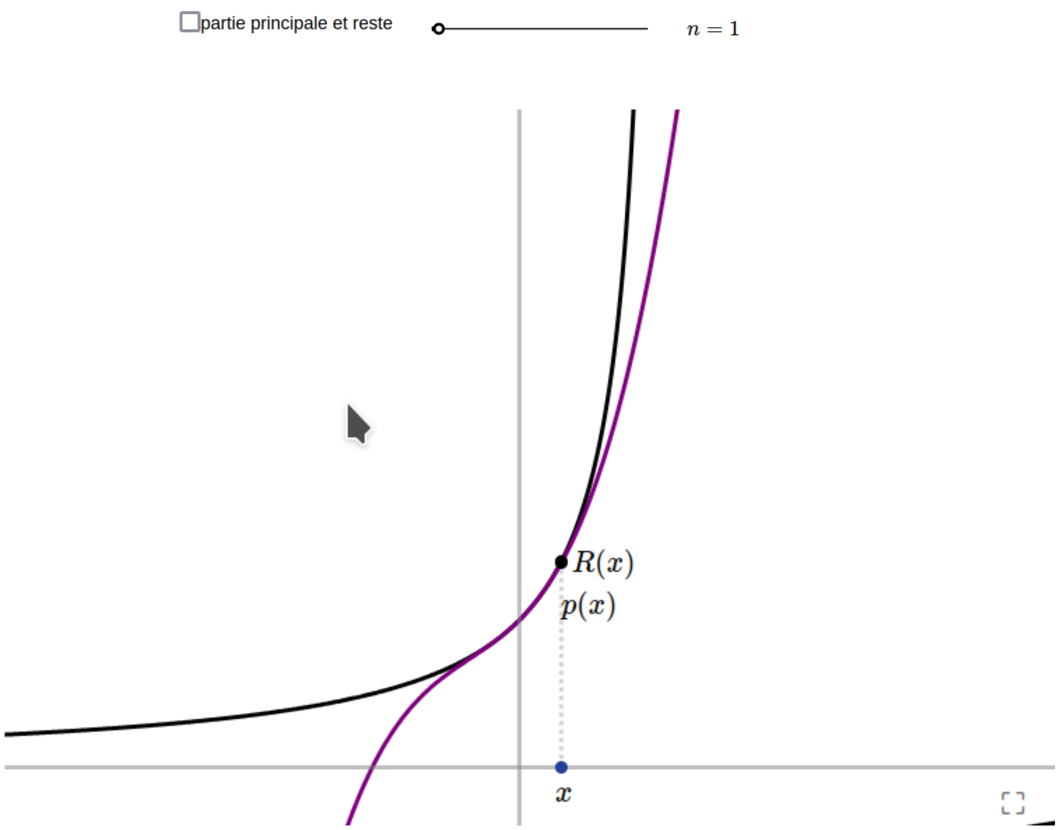
Exemple 10.8. Considérons $f(x) = \frac{1}{1-x}$, dans un voisinage de $x = 0$. Rappelons la formule obtenue pour une somme géométrique : pour tout $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\,,$$

qui permet d'écrire

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{\text{principale}} + x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{=:\varepsilon(x)}$$

Puisque $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, cette expression est bien le $DL(n)$ de f autour de zéro.



◇

10.3 Propriétés de base

Une conséquence de l'unicité est qu'un développement limité d'ordre n donne automatiquement des développements limités d'ordres inférieurs :

Corollaire 11. *Si f possède un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)\,,$$

alors pour tout $0 \leqslant k < n$, f possède un $DL(k)$ autour de x_0, donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \widetilde{R}(x)\,.$$

(Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont les mêmes, mais le reste est différent.)

Preuve: En effet, pour tout $k < n$, on peut réarranger le $DL(n)$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k \underbrace{\big(a_{k+1}(x - x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-k}\varepsilon(x)\big)}_{=:\tilde{\varepsilon}(x)} \end{aligned}$$

Comme $\tilde{\varepsilon}(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$, l'unicité du $DL(k)$ implique bien que cette dernière ligne est le $DL(k)$ de f autour de x_0. □

On peut ensuite obtenir des développements limités de sommes ou de produits de fonctions :

Lemme 28. *Soient f, g définies au voisinage de x_0, possédant chacune un $DL(n)$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n\,, \\ g(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n + \eta(x)(x - x_0)^n\,. \end{aligned}$$

Alors

1) *$f + g$ possède aussi un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*

$$(f + g)(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \phi(x)(x - x_0)^n\,,$$

où $c_k := a_k + b_k$, et $\phi(x) := \varepsilon(x) + \eta(x)$.

2) *$f \cdot g$ possède aussi un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*

$$(f \cdot g)(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)^2 + \cdots + d_n(x - x_0)^n + \psi(x)(x - x_0)^n\,,$$

où $d_k := \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, et $\lim_{x\to x_0} \psi(x) = 0$.

Preuve: 1. En additionnant les deux $DL(n)$ et en regroupant les termes correspondants aux mêmes puissances, on a

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = &(a_0 + b_0) \\ &+ (a_1 + b_1)(x - x_0) \\ &+ \cdots \\ &+ (a_n + b_n)(x - x_0)^n \\ &+ \underbrace{(\varepsilon(x) + \eta(x))}_{=:\phi(x)}(x - x_0)^n\,. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=0$, l'unicité du DL fait que l'expresion ci-dessus est bien le $DL(n)$ pour $f+g$.

2. Considérons pous simplifier le cas $n=2$. Et pour y voir clair, écrivons les parties principales de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)+\varepsilon(x)(x-x_0)^2\,,\\ g(x) &= q(x)+\eta(x)(x-x_0)^2\,, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2\\ q(x) &= b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2\,. \end{aligned}$$

En multipliant les deux $DL(2)$, et en regroupant, on obtient

$$\begin{aligned} &f(x)g(x)\\ &= p(x)q(x)+p(x)\eta(x)(x-x_0)^2+q(x)\varepsilon(x)(x-x_0)^2+\varepsilon(x)\eta(x)(x-x_0)^4\\ &= p(x)q(x)+(x-x_0)^2\underbrace{\big(p(x)\eta(x)+q(x)\varepsilon(x)+\varepsilon(x)\eta(x)(x-x_0)^2\big)}_{=:\psi_1(x)}\,, \end{aligned}$$

où $\psi_1(x)\to 0$ quand $x\to x_0$. Ensuite, calculons explicitement le produit des parties principales, et regroupons les puissances :

$$\begin{aligned} p(x)q(x) = a_0b_0 &\\ &+(a_0b_1+a_1b_0)(x-x_0)\\ &+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-x_0)^2\\ &+\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)(x-x_0)^3+a_2b_2(x-x_0)^4}_{=:\psi_2(x)(x-x_0)^2}\,, \end{aligned}$$

où $\psi_2(x)\to 0$ quand $x\to x_0$. On a donc, en posant $\psi(x):=\psi_1(x)+\psi_2(x)$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = a_0b_0 &\\ &+(a_0b_1+a_1b_0)(x-x_0)\\ &+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-x_0)^2\\ &+\psi(x)(x-x_0)^2\,. \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule dans le cas où $n=2$. Le cas général se traite de façon similaire. □

Exemple 10.9. Considérons

$$f(x)=\frac{e^x}{1-x}\qquad \text{au voisinage de } x_0=0\,.$$

On a déjà calculé plus haut les $DL(2)$ de e^x et $\frac{1}{1-x}$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\,,\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^2\eta(x)\,, \end{aligned}$$

Donc, par le lemme précédent,

$$\begin{aligned} e^x\cdot\frac{1}{1-x} &= (1\cdot 1)+(1\cdot 1+1\cdot 1)x+(1\cdot 1+1\cdot 1+\tfrac{1}{2}\cdot 1)x^2+x^2\psi(x)\\ &= 1+2x+\tfrac{5}{2}x^2+x^2\psi(x)\,. \end{aligned}$$

◇

10.4 La formule de Taylor

Maintenant, pour une fonction f donnée, on aimerait

- ⋆ Donner une condition suffisante sur f pour garantir qu'elle possède un $DL(n)$ en un point x_0.
- ⋆ Savoir comment calculer les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ et le reste.

Sans surprise, l'existence d'un DL sera garantie si la fonction est suffisamment *lisse* dans le voisinage de x_0.

10.4.1 La formule

Rappelons que pour un intervalle ouvert I, $C^k(I)$ désigne l'ensemble de fonctions k-fois dérivables, dont les dérivées $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$ sont toutes continues.

Théorème 10.10. *Soit I un intervalle ouvert, et $f \in C^{k+1}(I)$. Alors quel que soit $x_0 \in I$, f possède un $DL(k)$ autour de x_0, donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(x)\,,$$

où le reste $R(x) = (x-x_0)^k \varepsilon(x)$, et où la fonction $\varepsilon(x)$ est donnée par

$$\varepsilon(x) = (x-x_0)\frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!}\,,$$

et u est un réel entre x_0 et x, qui dépend de x_0, x, k, f.

L'expression ci-dessus, qui exprime le $DL(k)$ dans lequel les coefficients impliquant les dérivées d'ordre supérieur de la fonction, est la **Formule de Taylor**; lorsque $x_0 = 0$, c'est la **Formule de MacLaurin**.

Preuve: Fixons un point $x_0 \in I$, puis étudions $f(x)$ en un autre point $x \in I$, $x \neq x_0$. Sans perte de généralité, supposons que $x_0 < x$. Considérons le nombre A_x, défini implicitement par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^{k+1}\frac{A_x}{(k+1)!}\,.$$

(Cela signifie que si on le désire, on peut savoir ce que vaut A_x en l'isolant dans cette dernière expression.)

Avec x_0 et x fixés, on introduit la fonction $\varphi : [x_0, x] \to \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t) := f(x) - \Big\{ f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + (x-t)^{k+1}\frac{A_x}{(k+1)!} \Big\}\,.$$

Remarquons que φ satisfait aux hypothèses du Théorème de Rolle :

- ⋆ $\varphi(t)$ est continue sur $[x_0, x]$, et dérivable sur $]x_0, x[$. En effet, les puissances de t qu'elle contient sont évidemment dérivables, et comme on suppose que f est $k+1$ fois dérivable, toutes les dérivées $f^{(1)}(t), \dots, f^{(k)}(t)$ apparaissant dans $\varphi(t)$ sont continues.
- ⋆ $\varphi(x_0) = \varphi(x) = 0$.

Il existe donc un point $u \in]x_0, x[$ tel que $\varphi'(u) = 0$.

Maintenant, dérivons φ par rapport à t. (On rappelle que dans cette dérivation, "x" est considéré comme une constante !)

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) = 0 - \Big\{ (f(t))' + (f'(t)(x-t))' + \Big(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 \Big)' + \cdots + \Big(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \Big)' + \Big((x-t)^{k+1} \frac{A_x}{(k+1)!} \Big)' \Big\} \\
= -\Big\{ f'(t) + (f''(t)(x-t) - f'(t)) + \Big(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)^1 \Big) \\
+ \Big(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 \Big) \\
+ \cdots \\
+ \Big(\underbrace{\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \Big) - \underbrace{(x-t)^k \frac{A_x}{k!}} \Big\} .
\end{aligned}
$$

En profitant du téléscopage,

$$
\varphi'(t) = \frac{(x-t)^k}{k!} \big(A_x - f^{(k+1)}(t) \big) ,
$$

En utilisant cette expression au point $t = u$ défini ci-dessus,

$$
0 = \varphi'(u) = \frac{(x-u)^k}{k!} \big(A_x - f^{(k+1)}(u) \big) .
$$

Puisque $x_0 < u < x$, on a $(x-u)^k \neq 0$, ce qui implique

$$
A_x = f^{(k+1)}(u) ,
$$

et prouve la formule de Taylor.

Pour montrer qu'on a vraiment obtenu un $DL(k)$, il reste à étudier le reste, qui est donné par

$$
\varepsilon(x) = (x - x_0) \frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!} .
$$

Considérons un petit intervalle fermé autour de x_0 : $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Puisque $f \in C^{(k+1)}(I)$, la continuité de $f^{(k+1)}$ sur I implique qu'elle est bornée sur J : il existe une constante C telle que

$$
|f^{k+1}(x)| \leqslant C \qquad \forall x \in J .
$$

En particulier, $|f^{(k+1)}(u)| \leqslant C$, ce qui implique que sur J, $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{C}{(k+1)!}|x - x_0|$. En particulier,

$$
\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 .
$$

(ici, Video: a_breaking_bad_DL.mp4)

□

Informel 10.11. Le résultat ci-dessus est intéressant, mais ses hypothèses peuvent en fait être affaiblies : il existe un résultat similaire, mais qui garantit l'existence d'un $DL(k)$ pour une fonction k fois (et non pas $k+1$ fois) continûment dérivable. L'avantage de la formulation ci-dessus est que le reste est exprimé de façon très explicite, ce qui permettra d'utiliser le résultat efficacement au chapitre suivant.

Donc la formule de Taylor nous dit que l'on peut obtenir un développement limité en x_0 d'ordre arbitrairement grand, à condition que la fonction soit suffisamment dérivable en x_0 et dans son voisinage, et que l'on sache calculer ses dérivées $f^{(k)}(x_0)$.

Exemple 10.12. Considérons

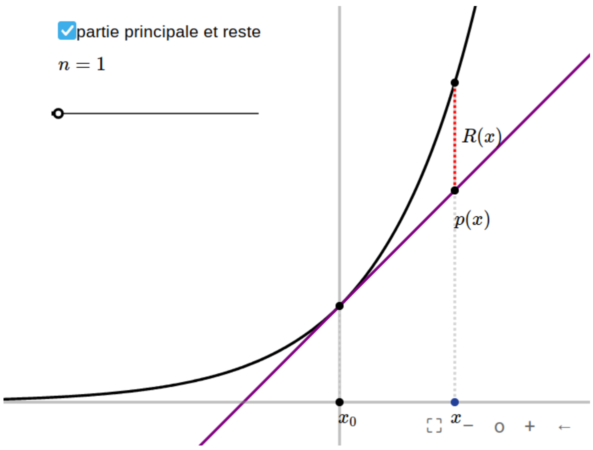
$$f(x) = e^x \qquad \text{au voisinage de } x_0 = 0\,.$$

Comme e^x est de classe C^{k+1} pour tout k, elle possède des développements limités de tous les ordres. On a $f^{(j)}(x) = e^x$ et donc $f^{(j)}(0) = 1$ pour tout j. Par la formule de MacLaurin,

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + R(x)}\,,$$

où $R(x) = x^k\varepsilon(x)$, et

$$\varepsilon(x) = x\frac{e^u}{(k+1)!} \qquad \text{pour un certain } u \in]0, x[\,.$$



◇

Exemple 10.13. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x_0 = 0$. Puisque f n'est pas définie en $x = 1$, on la considère par exemple dans l'ouvert $]-1,1[$. Écrivons $f(x) = (1-x)^{-1}$, et calculons ses dérivées :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= (-1)(1-x)^{-2}(-1)\\
f^{(2)}(x) &= (-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2\\
f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4}(-1)^3\\
&\cdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)(-2)(-3)\cdots(-k)(1-x)^{-(k+1)}(-1)^k\,.
\end{aligned}$$

On a donc $f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$ pour tout j, ce qui donne

$$f^{(j)}(0) = j!$$

Par la formule de MacLaurin,

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + R(x)\,,}$$

qui est bien ce que nous avions trouvé plus haut. ◇

Exemple 10.14. Considérons $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$. Rappelons que

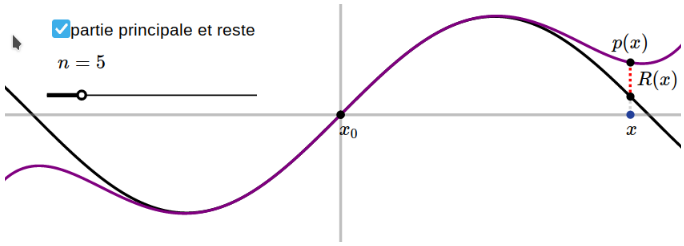
$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\tfrac{\pi}{2})\,,$$

donc $f^{(k)}(0) = 0$ pour tous les k pairs, ce qui a pour conséquence que le développement de MacLaurin ne contient aucune puissance paire. On a par exemple le $DL(3)$,

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)}$$

ou le $DL(5)$:

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R(x)\,.}$$



◇

Remarque 10.15. Si on dispose d'une calculatrice qui ne connaît pas les fonctions trigonométriques, on peut utiliser des développements limités. Pour illustrer le procédé, supposons que l'on veuille calculer le sinus d'un angle de 1 radian, $\sin(1)$, sans calculatrice. En allant jusqu'à l'ordre 9, l'approximation par la partie principale

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

fournit déjà une approximation remarquable, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Si on l'utilise pour $x = 1$:

$$\sin(1) \simeq 0.8414710097 \quad \text{(ordre } 9)$$

Si on compare avec la valeur "exacte" obtenue avec une calculatrice :

$$\sin(1) = 0.8414709848 08\cdots \quad \text{(exact)}\,.$$

◇

Exemple 10.16. $f(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$:

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R(x)}$$

◇

Exemple 10.17. $f(x) = \log(1+x)$ en $x_0 = 0$. Les dérivées se calculent facilement :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= (1+x)^{-1}\\
f^{(2)}(x) &= (-1)(1+x)^{-2}\\
f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}\\
&\cdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,.$$

On a ainsi le $DL(k)$:

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + R(x)\,.}$$

◇

10.4.2 À propos de l'existence d'un DL

10.5 Utilisation de DL pour le calcul de limites

Les développements limités fournissent un moyen très précis d'approximer une fonction au voisinage d'un point, à l'aide d'un polynôme. Et les polynômes étant des objets très simples à manipuler, l'utilisation de développements limités peut grandement simplifier l'étude d'une fonction en ce point.

Par exemple, ils peuvent être utiles pour le calcul de certaines limites.

Dans toutes les indéterminations "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

rencontrées précédemment, on étudie un quotient de deux fonctions dont les valeurs deviennent toujours plus petites à mesure que x se rapproche de x_0. *Lever l'indétermination* c'est, en somme, arriver à expliciter la "petitesse" de chacune des deux fonctions, de façon suffisamment précise pour arriver à pouvoir calculer la valeur du quotient lorsque x est proche de x_0.

Exemple 10.18. Considérons l'indétermination "$\frac{0}{0}$" dans la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

On a déjà calculé cette limite (en multipliant et divisant par le conjugué $\cos(x)+1$), mais voyons comment utiliser un DL pour approcher le problème de façon différente.

Comme on s'intéresse à x proche de 0, on peut utiliser le $DL(2)$ du cosinus vu plus haut,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x),$$

où on rappelle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ce DL permet de montrer que la "petitesse" du numérateur de notre quotient est en fait quadratique en x, puisque

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) = \big(-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\big)x^2 .$$

(Une "petitesse en x^2" donc.) Ceci donne

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{(-\frac{1}{2}+\varepsilon(x))x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x) .$$

Cette expression montre, de manière transparente, que ce quotient est proche de $-\frac{1}{2}$ quand x est proche de 0. En effet, puisque $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, la limite est

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = -\frac{1}{2} .$$

◇

Informel 10.19. Attention : lorsqu'on utilise un $DL(n)$, on utilise le fait que la fonction "$\varepsilon(x)$" est petite proche du point considéré. Pourtant, on ne sait en général pas estimer précisément la petitesse de $\varepsilon(x)$!

Parfois, pour arriver à décrire précisément la petitesse d'un terme, il est nécessaire de choisir un DL d'un ordre suffisamment grand, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 10.20. (Sur l'importance du choix de l'ordre du DL.) Étudions

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2(1-\cos x)}\,.$$

Numérateur et dénominateur sont petits quand x est proche de 0, et des DL vont permettre de quantifier précisément leurs petitesses respectives. Par contre, on va voir qu'il sera nécessaire de prendre un développement d'ordre *suffisamment élevé* pour conclure.

1) Commençons simplement, en prenant le $DL(1)$ pour le sinus et le $DL(2)$ pour le cosinus. On nomme les restes différemment pour pouvoir les distinguer :

$$\sin(x) = x + x\varepsilon_s(x) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\,.$$

Alors le numérateur devient

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 - x^2\cos(x) &= \big(x + x\varepsilon_s(x)\big)^2 - x^2\big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\big)\\ &= \underbrace{2x^2\varepsilon_s(x) + x^2\varepsilon_s(x)^2 + \frac{x^4}{2!} + x^4\varepsilon_c(x)}_{??}\end{aligned}$$

Dans cette expression, tout est petit, mais aucun terme ne domine clairement les autres. Il est donc nécessaire d'aller à un ordre plus élevé.

2) Prenons le $DL(3)$ pour le sinus, en gardant le $DL(2)$ pour le cosinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_s(x) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\,.$$

Alors le numérateur peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(\sin x)^2 - x^2\cos x\\ &= \big(x - \tfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_s(x)\big)^2 - x^2\big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\big)\\ &= \frac{1}{6}x^4 + x^4\underbrace{\big(\tfrac{x^2}{(3!)^2} + x^2\varepsilon_s(x)^2 + 2\varepsilon_s(x) - \tfrac{x^2}{3!}\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)\big)}_{\equiv\varepsilon(x)}\\ &= \Big(\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\Big)x^4\,.\end{aligned}$$

Maintenant, on comprend que la petitesse du numérateur est en x^4.

Ensuite, le dénominateur devient

$$\begin{aligned}x^2(1-\cos x) &= x^2\Big\{1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{2}x^4 - x^4\varepsilon_c(x)\\ &= \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon_c(x)\Big)x^4\,.\end{aligned}$$

et représente donc aussi une petitesse en x^4. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2(1-\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{6} + \varepsilon(x))x^4}{(\frac{1}{2} - \varepsilon_c(x))x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6} + \varepsilon(x)}{\frac{1}{2} - \varepsilon_c(x)}\\ &= \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Remarquons que dans ce calcul, on a vraiment travaillé partout avec des égalités ! ◇

10.6 Composition de DL

Supposons qu'on veuille un $DL(n)$ d'une fonction f autour d'un point x_0, et que cette fonction soit en fait une composée :

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) .$$

On supposera, pour simplifier l'exposition, que les fonctions g et h possèdent des dérivées de tous les ordres.

Informel 10.21. A priori, on pourrait utiliser la formule de Taylor, qui permet d'obtenir un développement limité pour f en passant par les dérivées $f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$. Mais puisque f est une composée, le calcul de $f^{(k)}(x_0)$, pour k grand, risque bien d'être compliqué...

10.6.1 Cas simples

Voyons un exemple simple de composée dans lequel on peut éviter de passer par le calcul des grandes dérivées de f.

Exemple 10.22. Fixons un entier n, grand, et cherchons un $DL(n)$ de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} ,$$

autour de $x = 0$. Cette fonction peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-z}\Big|_{z=-x^2} = g(h(x)) ,$$

où

$$g(x) = \frac{1}{1-x} , \qquad h(x) = -x^2 .$$

Pour g, on a déjà calculé le $DL(n)$ autour de $z_0 = 0$,

$$g(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + R(z) ,$$

où $R(z) = z^n \varepsilon(z)$. Comme $z = h(x) = -x^2$ est proche de 0 lorsque x est proche de $x_0 = 0$, on peut l'injecter directement dans le DL de g, ce qui donne le DL de $f = g \circ h$:

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= 1 + h(x) + h(x)^2 + h(x)^3 + \cdots + h(x)^n + R(h(x)) \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + R(-x^2) \end{aligned}$$

Si on regarde le reste de plus près,

$$R(-x^2) = (-x^2)^n \varepsilon(-x^2) = x^{2n} \tilde{\varepsilon}(x) ,$$

où on a posé $\tilde{\varepsilon}(x) := (-1)^n \varepsilon(-x^2)$, qui tend bien vers zéro lorsque $x \to 0$.

On a donc

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \tilde{\varepsilon}(x) .$$

◇

On peut utiliser une idée semblable pour des développements qui ne sont pas forcément autour de $x = 0$:

Exemple 10.23. Soit

$$f(x) = \frac{1}{x} .$$

Cherchons un $DL(n)$ de f autour de $x_0 = 3$. Ici aussi, on pourrait facilement calculer les dérivées de f d'ordre quelconque (voir plus bas), mais on peut aussi récrire f en utilisant le fait qu'on l'étudie autour de $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{3 + (x-3)} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{1-z}\Big|_{z=-\frac{x-3}{3}} \\
&= \frac{1}{3} g(h(x)) ,
\end{aligned}$$

où $g(z) = \frac{1}{1-z}$ et $h(x) = -\frac{x-3}{3}$. Quand x est proche de $x_0 = 3$, $z = h(x)$ est proche de zéro ; on peut donc directement injecter $h(x)$ dans le $DL(n)$ de g :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}\Big\{1 + h(x) + h(x)^2 + h(x)^3 + \cdots + h(x)^n + R(h(x))\Big\} \\
&= \frac{1}{3}\Big\{1 - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{3^2}(x-3)^2 - \frac{1}{3^3}(x-3)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}(x-3)^n + R(-\frac{x-3}{3})\Big\} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{1}{3^3}(x-3)^2 - \frac{1}{3^4}(x-3)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n + \tilde{R}(x)
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on tombe bien ce qu'on aurait trouvé en passant par la formule de Taylor. En effet, si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} ,$$

et donc

$$\frac{f^{(n)}(3)}{n!} = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} .$$

◇

10.6.2 Cas plus compliqués

Dans les deux exemples ci-dessus, $h(x)$ était un petit polynôme, que l'on a pu directement injecter dans le DL de g, pour obtenir le DL de $g \circ h$. Que faire, alors, si h n'est plus un polynôme ?

Informel 10.24. Par exemple, comment calculer un $DL(n)$ de

$$f(x) = \log(1 + \sin(x))$$

autour de $x_0 = 0$? L'idée est que l'on connaît le $DL(n)$ de $\log(1 + z)$ pour z autour de zéro :

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} + R(z)\,,$$

Comme $\sin(x)$ est petit lorsque x est proche de 0, on aimerait utiliser cette expression pour $z = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}&\log(1 + \sin(x))\\ &\quad = \sin(x) - \frac{(\sin(x))^2}{2} + \frac{(\sin(x))^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(\sin(x))^n}{n} + R((\sin(x)))\,.\end{aligned}$$

Cette jolie formule est correcte, mais ce n'est pas un développement limité ("polynôme+reste") ! Donc ce qu'on pourrait faire ensuite, c'est utiliser le DL du sinus et l'injecter dans cette expression...

Théorème 10.25. *Soient*

1) $h(x)$ *une fonction possédant un* $DL(n)$ *autour de* x_0*, et*
2) $g(z)$ *une fonction possédant un* $DL(n)$ *autour de* $z_0 = h(x_0)$.

Alors $f(x) := g(h(x))$ *possède un* $DL(n)$ *autour de* x_0*, dont la partie principale s'obtient comme suit :* ***on injecte la partie principale du développement de*** $h(x)$ ***dans la partie principale du développement de*** $g(z)$***, on développe, et on ne garde que les termes qui sont des puissances de*** $x - x_0$ ***plus petites ou égales à*** n.

Preuve: Nous omettons la preuve, en reconnaissant qu'elle représente un calcul assez fastidieux, qui pourtant ne représente aucune difficulté particulière. (Il s'agit en gros de savoir développer les puissances d'un polynôme, et de regrouper correctement les termes, pour voir tout ce qui part dans le reste.) □

Informel 10.26. Ce qui est pratique, dans ce procédé, c'est qu'on peut se concentrer uniquement sur les parties principales, on n'a pas besoin de regarder les restes de trop près !

Exemple 10.27. Cherchons le $DL(3)$ de $f(x) = \log(1 + \sin(x))$ autour de $x_0 = 0$. On commence par identifier la composition : $f(x) = g(h(x))$, où $g(z) = \log(1 + z)$, $h(x) = \sin(x)$. Prenons un $DL(3)$ pour $h(x)$,

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{\text{principale}} + x^3\varepsilon_s(x)\,.$$

et un $DL(3)$ pour $g(z)$:

$$\log(1 + z) = \underbrace{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}}_{\text{principale}} + z^3\varepsilon_{\log}(z)\,.$$

Maintenant, on injecte la partie principale du $DL(3)$ du sinus dans la partie principale du $DL(3)$ du logarithme, on développe, on regroupe les puissances en ordre croissant, et on ne garde que les puissances $\leqslant 3$:

$$\begin{aligned} z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\Big|_{z=x-\frac{x^3}{3!}} &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 \\ &= \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3}_{\text{puissances}\leqslant 3} + \underbrace{\cdots}_{\text{puissances }>3} \end{aligned}$$

Donc le $DL(3)$ de f autour de $x = 0$ est donné par

$$\log(1 + \sin(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\,.$$

◇