Chapitre 14

Compléments

14.1 $\exp$ et $\log$

Il existe plusieurs manières de définir rigoureusement les fonctions exponentielles et logarithme, mais toutes commencent par en construire une pour ensuite obtenir l'autre.

Dans cette section, on construit d'abord la fonction exponentielle à l'aide d'une série de puissances, on étudie ses propriétés, et on l'utilise ensuite pour construire la fonction logarithme. (Dans la section suivante on fera le contraire.)

Considérons la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x)$ avec paramètre x, pour laquelle

$$a_n(x) := \frac{x^n}{n!}\,.$$

Puisqu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0\,,$$

le critère de d'Alembert implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x)$ converge absolument, et définit ainsi une fonction sur tout $\mathbb{R}$.

Définition 14.1. On appelle **exponentielle** la fonction

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x) := \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Remarquons que par définition,

$$\exp(0) = 1\,.$$

Toute l'importance de cette fonction réside dans sa propriété fondamentale : *elle transforme les sommes en produits*. Plus précisément :

Théorème 14.2. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,.$$

Preuve: Par définition,

$$\exp(x+y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(x+y)^n}{n!}\,.$$

Par la formule du binôme, pour tout $n \geqslant 0$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{(x+y)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{N} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!}\end{aligned}$$

Définissons $N' = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, et décomposons la somme sur k en deux :

$$\sum_{k=0}^{N} = \sum_{k=0}^{N'} + \sum_{k=N'+1}^{N}$$

La deuxième s'estime comme suit : puisque $\sum_{l=0}^{N-k} \frac{|y|^l}{l!} \leqslant \exp(|y|)$,

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big| &\leqslant \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{|x|^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{|y|^l}{l!} \\ &\leqslant \exp(|y|) \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{|x|^k}{k!}\,,\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $N \to \infty$. On peut ensuite écrire la première somme ainsi :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \\ &\quad= \exp(y) \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big) \\ &\quad= \exp(x)\exp(y) + \\ &\qquad\qquad \exp(y) \Big(\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} - \exp(x) \Big) - \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big)\,,\end{aligned}$$

D'une part,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)\,,$$

et d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ on a que, pour tout N suffisamment grand, et pour tout $k \leqslant N'$,

$$\Big| \exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big| \leqslant \varepsilon\,,$$

qui permet de majorer

$$\Big|\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!}\Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!}\Big)\Big| \leqslant \varepsilon|\exp(y)|$$

On a donc bien démontré que

$$\exp(x+y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x)\exp(y)\,.$$

□

Cette propriété rappelle celle de la fonction “puissance” en arithmétique, $n \mapsto a^n$, qui transforme aussi les sommes en produits : pour toute base $a > 0$,

$$a^{m+n} = a^m a^n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}\,.$$

La base se retrouve en prenant $n = 1$: $a^1 = a$.

Pour cette raison, on utilise souvent la notation

$$\exp(x) \equiv e^x\,,$$

où le nombre

$$e := \exp(1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = 2.718\cdots$$

En bas de page, on montre que ce nombre est en fait le même que celui défini dans la section sur la **série géométrique** (lien vers la section `m_suites_serie_geometrique`), et qu'il est irrationnel.

Voyons des conséquences de la propriété fondamentale :

Corollaire 13. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Preuve: En utilisant le théorème,

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)\,.$$

□

Puisque $\exp(x) > 1 > 0$ pour tout $x > 0$, le corollaire implique que $0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < 1$ pour tout $x > 0$. En particulier, $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on peut écrire plus précisément l'ensemble d'arrivée de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x)\,. \end{aligned}$$

Théorème 14.3. *L'exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$\big(\exp(x)\big)' = \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Preuve: Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}\,. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\exp(h)-1}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{k\geqslant 1}\frac{h^k}{k!}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{h^{k-1}}{k!}\\ &= \sum_{j\geqslant 0}\frac{h^j}{(j+1)!}\\ &= 1+\sum_{j\geqslant 1}\frac{h^j}{(j+1)!}\,,\end{aligned}$$

ce qui entraîne, lorsque $|h|<1$, et puisque $(j+1)!\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\exp(h)-1}{h}-1\Big| &\leqslant \sum_{j\geqslant 1}\frac{|h|^j}{(j+1)!}\\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 1}|h|^j\\ &= \frac{|h|}{1-|h|}\,.\end{aligned}$$

(On a sommé la série géométrique.) On a donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}=1\,,$$

ce qui démontre l'affirmation. □

Une conséquence immédiate de ce dernier résultat : étant dérivable partout, $x\mapsto\exp(x)$ est continue. On utilise ce fait pour démontrer :

Proposition 20. $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ *est une bijection.*

Preuve: Remarquons que si $x>0$, alors $\frac{x^k}{k!}>0$ pour tout $k\geqslant 2$, et donc

$$\exp(x)>1+x \qquad \forall x>0\,,$$

qui entraîne

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty\,,$$

ainsi que

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=\lim_{y\to+\infty}\exp(-y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\exp(y)}=0\,.$$

Fixons maintenant $y>0$. Les deux limites ci-dessus impliquent qu'il existe a et b tels que $\exp(a)<y<\exp(b)$. Par le Théorème de la valeur intermédiaire appliqué à $\exp:[a,b]\to\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe $x\in]a,b[$ tel que $\exp(x)=y$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(\exp)=\mathbb{R}_+^*$, et donc que la fonction est surjective.

Montrons qu'elle aussi injective. Pour ce faire, remarquons que si $x<x'$, le Théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c\in]x,x'[$ tel que

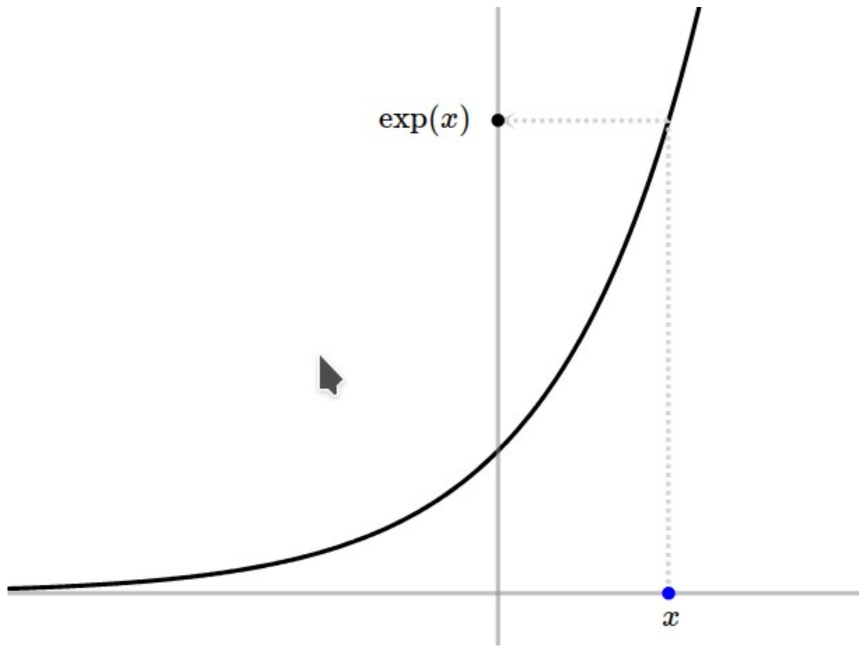
$$\frac{\exp(x')-\exp(x)}{x'-x}=\exp'(c)=\exp(c)\,.$$

Puisque $\exp(c)>0$, on en déduit que $\exp(x)<\exp(x')$.

Ainsi, $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est bijective. □

On a démontré, en passant, que

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty\,.$$



14.1.1 Logarithme

Puisque l'exponentielle est bijective, on peut considérer sa réciproque :

Définition 14.4. La réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est appelée **logarithme** :

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) \end{aligned}$$

Par définition, on a donc

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ \exp(\log(y)) &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^*\,. \end{aligned}$$

Si l'exponentielle transforme des sommes en produits, sa réciproque doit forcément transformer des produits en sommes :

Théorème 14.5. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

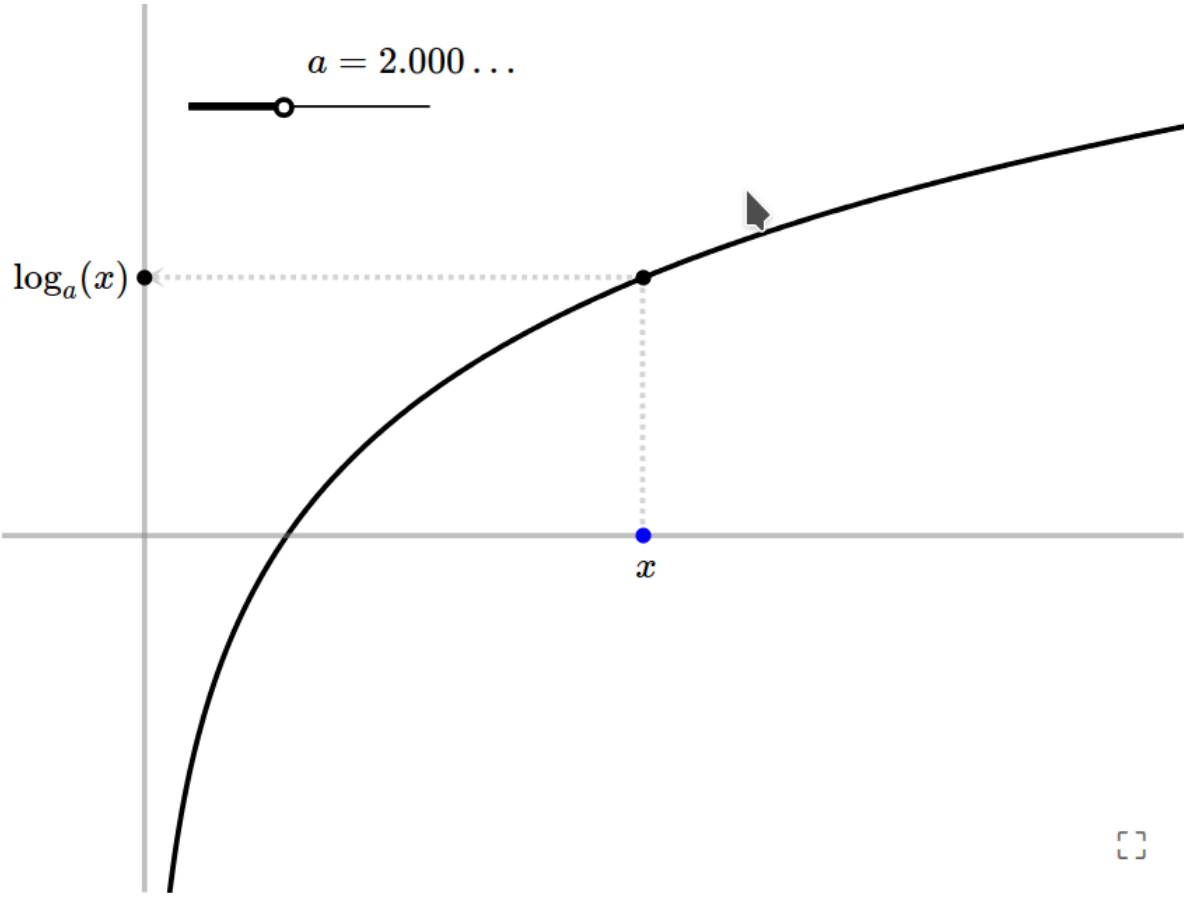
Preuve: Par définition, $t = \log(xy)$ si et seulement si $\exp(t) = xy$. Mais $x = \exp(\log(x))$ et $y = \exp(\log(y))$, et donc

$$\exp(t) = \exp(\log(x))\exp(\log(y)) = \exp\big(\log(x) + \log(y)\big)\,.$$

Ceci implique que $\log(xy) = t = \log(x) + \log(y)$. □

D'autres propriétés qui découlent directement du fait que le logarithme est la réciproque de l'exponentielle : $\log(1) = 0$,

$$\log(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ > 0 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$



De plus, par le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, pour tout $x > 0$, en dérivant les deux côtés de l'identité

$$\exp(\log(x)) = x\,,$$

on obtient

$$\exp'(\log(x))(\log(x))' = 1\,,$$

qui donne

$$(\log(x))' = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}\,.$$

Notons encore que

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty\,.$$

14.1.2 Changements de base

On peut utiliser $\exp$ et $\log$ pour définir d'autres fonctions, dont les propriétés sont semblables mais que l'on interprète comme exponentielles et logarithmes dans des *bases* différentes.

Soit $a > 0$, appelé **base**.

Définition 14.6. L'**exponentielle de base** a est la fonction

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a(x) := \exp(x\log(a))\,. \end{aligned}$$

On a bien sûr que

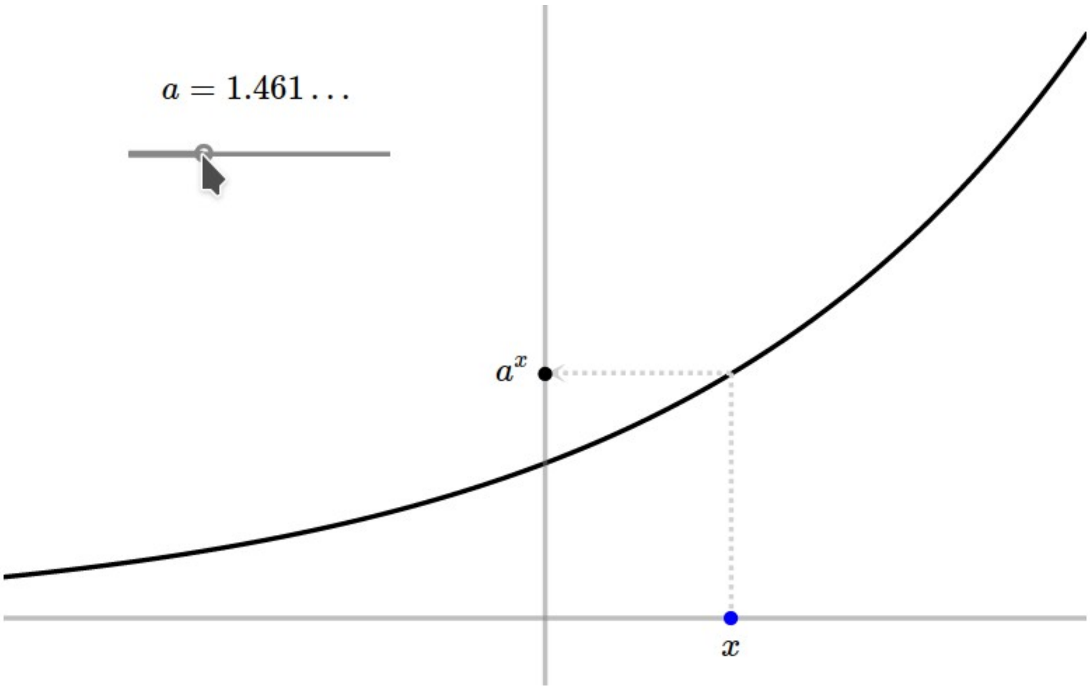
$$\begin{aligned}\exp_a(x+y) &= \exp((x+y)\log(a)) \\ &= \exp(x\log(a) + y\log(a)) \\ &= \exp(x\log(a))\exp(y\log(a)) \\ &= \exp_a(x)\exp_a(y)\,,\end{aligned}$$

et on utilise aussi la notation $\exp_a(x) \equiv a^x$.

On peut ensuite calculer

$$(\exp_a(x))' = \big(\exp(x\log(a))\big)' = \log(a)\underbrace{\exp_a(x)}_{>0}\,,$$

et puisque le signe de $\log(a)$ change, on en déduit que $\exp_a(x)$ est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.



Remarquons que l'on peut maintenant considérer une exponentielle évaluée en un point $x > 0$, mais dont la base est elle-même une fonction $a(y) > 0$:

$$\exp_{a(y)}(x) = a(y)^x := \exp(x\log(a(y)))\,.$$

En particulier, on a la formule classique : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(a^y)^x := \exp(x\log(a^y)) = \exp((xy)\log(a)) = a^{xy}\,.$$

Aussi, si la base dépend de x et que l'exposant est une fonction de x, on doit admettre implicitement la définition suivante :

Définition 14.7. Si $f(x) > 0$, alors

$$f(x)^{g(x)} := \exp\big(g(x)\log(f(x))\big)\,.$$

14.1.3 Définition alternative de e

Dans **cette section** (lien vers la section m_suites_serie_geometrique), le nombre $e = 2.718\dots$ a été défini par la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

On montre ici que ce nombre est aussi égal à $\exp(1)$:

Théorème 14.8.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$$

Preuve: Définissons

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n , \qquad e'_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} .$$

On veut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{N\to\infty} e'_N .$$

Rappelons que la **formule du binôme de Newton** (lien vers la section m_recurrence) permet d'écrire

$$e_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) .$$

Puisque $1-\frac{j}{n}<1$ pour tout $j=1,2,\dots,n-1$, on en déduit que

$$e_n < e'_n ,$$

et donc que

$$\lim_{n\to\infty} e_n \leqslant \lim_{n\to\infty} e'_n .$$

Ensuite, fixons un entier N, quelconque, et remarquons que pour tout $n>N$,

$$e_n > 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) .$$

En prenant $n\to\infty$, ceci donne

$$\lim_{n\to\infty} e_n \geqslant 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!} = e'_N .$$

Comme cette dernière inégalité vaut pour tout N, on a aussi que

$$\lim_{n\to\infty} e_n \geqslant \lim_{N\to\infty} e'_N .$$

□

14.1.4 Irrationnalité de e

Théorème 14.9. *Le nombre $e=\exp(1)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ est irrationnel.*

Preuve: Par l'absurde, supposons que e est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p,q\in\mathbb{N}^*$ tels que

$$e=\frac{p}{q} .$$

Définissons la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$:

$$M_n = n!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

Par définition, $M_n > 0$ pour tout n (puisque la suite $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est strictement croissante et tend vers e).

Ensuite, notre hypothèse permet d'écrire

$$M_n = n!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right),$$

qui implique que lorsque $n > q$, M_n est un **entier** : $M_n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Or on peut remarquer que

$$\begin{aligned}
M_n &= n!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \\
&= n!\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \\
&= n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $M_n < 1$ lorsque $n > 1$, une contradiction puisqu'on a dit plus haut que $M_n \geqslant 1$ est un entier. □

14.2 log **et** exp

Dans cette section, on construit la fonction logarithme, on étudie ses propriétés, et on l'utilise pour en déduire la fonction exponentielle.

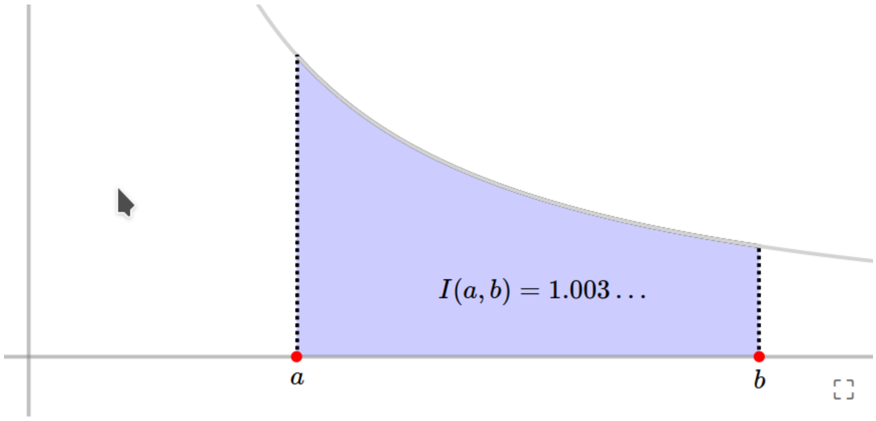
14.2.1 Aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$

Pour commencer définissons, pour tous $a, b > 0$, le nombre

$$I(a, b) := \int_a^b \frac{dt}{t}\,.$$

Si $a < b$, $I(a, b)$ le nombre s'interprète comme l'aire de la région délimitée par l'axe Ox, le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$: Si $a > b$, la convention faite sur l'intégrale implique que

$$I(a, b) = -I(b, a)\,.$$



Cette fonction de deux variables satisfait aux propriétés suivantes :

Proposition 21. ⋆ *Relation de Chasles : pour tous réels strictement positifs* a, b, c,

$$I(a, b) + I(b, c) = I(a, c)\,.$$

⋆ *Pour tous* $0 < a < b < c$, *et pour tout* $\lambda > 0$,

$$I(\lambda a, \lambda b) = I(a, b)\,.$$

Preuve: La première propriété suit de $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$. Pour la deuxième, par le changement de variable $s := t/\lambda$ (qui donne $dt = \lambda ds$) dans l'intégrale définie,

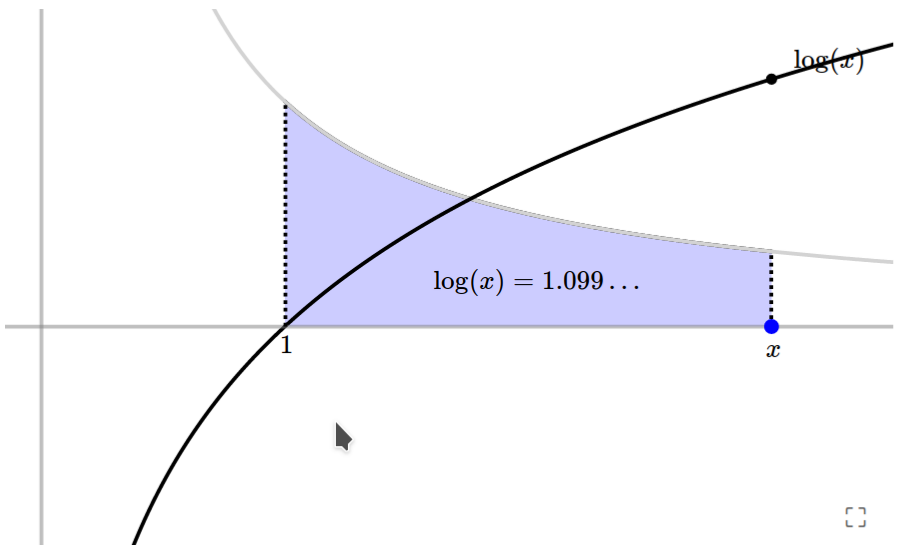
$$I(\lambda a, \lambda b) = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{\lambda dt}{\lambda s} = \int_a^b \frac{dt}{s} = I(a, b)\,.$$

□

14.2.2 Définition du logarithme

Définition 14.10. Le **logarithme** est la fonction

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) := I(1, x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\,. \end{aligned}$$



On a en particulier :

$$\log(1) = 0\,.$$

La propriété remarquable de cette fonction est qu'elle transforme des produits en sommes :

Théorème 14.11. *Pour tous $x, y > 0$,*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

Preuve: Par la proposition, $I(x, xy) = I(y)$, et donc, en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\log(xy) &= I(1, xy)\\ &= I(1, x) + I(x, xy)\\ &= I(1, x) + I(1, y)\\ &= \log(x) + \log(y)\,.\end{aligned}$$

□

Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$0 = \log(1) = \log(x\tfrac{1}{x}) = \log(x) + \log(\tfrac{1}{x})\,,$$

qui donne

$$\log(\tfrac{1}{x}) = -\log(x)\,.$$

Théorème 14.12. *Le logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et*

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}\,.$$

En particulier, $x \mapsto \log(x)$ est strictement croissante.

Preuve: Par le Théorème Fondamental de l'Analyse, étant défini comme l'intégrale d'une fonction continue, $\log$ est dérivable et

$$(\log(x))' = \Big(\int_1^x \frac{dt}{t}\Big)' = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

□

Puisque le logarithme est dérivable, il est continu sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lemme 33.

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty\,.$$

Preuve: Puisque c'est une fonction strictement croissante, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \log(n) = \lim_{n\to\infty} I(1, n) = +\infty\,.$$

En comparant l'aire sous la courbe avec les rectangles de bases $[k, k+1]$ sous la courbe, $k = 1, \dots, n-1$,

$$I(1, n) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

On reconnaît dans cette somme la somme partielle de la série harmonique, qui tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$.

L'autre limite est une conséquence de la première, puisque par le changement de variable $x = \frac{1}{y}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \log(x) &= \lim_{y\to +\infty} \log(\tfrac{1}{y}) \\ &= -\lim_{y\to +\infty} \log(y) \\ &= -\infty\,.\end{aligned}$$

□

Puisque $\log$ est continue, les deux limites ci-dessus impliquent que $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$. Puisqu'elle est strictement croissante, elle est aussi injective. On a donc montré que $\log$ est une bijection.

Définition 14.13. La réciproque de $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction **exponentielle**,

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x)\,,\end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned}\log(\exp(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ \exp(\log(y)) &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^*\,.\end{aligned}$$

On a la propriété fondamentale :

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp\big(\log(\exp(x)) + \log(\exp(y))\big) \\ &= \exp\big(\log(\exp(x)\exp(y))\big) \\ &= \exp(x)\exp(y))\,.\end{aligned}$$

De plus, en dérivant la relation

$$x = \log(\exp(x))\,,$$

par rapport à x,

$$1 = \log'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)}(\exp(x))'\,,$$

qui entraîne

$$\exp(x)' = \exp(x)\,.$$

14.2.3 Changements de base

(On peut procéder comme dans la section précédente.)

14.3 Fonctions hyperboliques

On définit ici les *fonctions trigonométriques hyperboliques*. Même si ces fonctions seront définies uniquement à partir de l'exponentielle, leurs propriétés rappelleront clairement celles des fonctions trigonométriques de base. En fin de section, on fera quelques commentaires sur l'origine du terme "hyperbolique".

Définition 14.14. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ⋆ Le **sinus hyperbolique** de x est défini par
$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$
- ⋆ Le **cosinus hyperbolique** de x est défini par
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$
- ⋆ La **tangente hyperbolique** de x est définie par
$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Remarquons que

- ⋆ $\cosh(x)$ est paire, que $\cosh(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ⋆ $\sinh(x)$ et $\tanh(x)$ sont impaires, et positives si $x > 0$, négatives si $x < 0$.
- ⋆ On a vu **ici** (lien vers la section m_fonctions_paires_impaires) que toute fonction peut se décomposer en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En appliquant ce résultat à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient précisément
$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)\,.$$

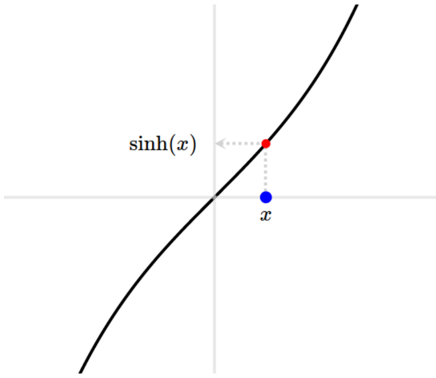
On peut voir la tangente hyperbolique comme étant définie par
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

Un simple calcul mène à
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1\,,$$
qui entraîne
$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\,.$$

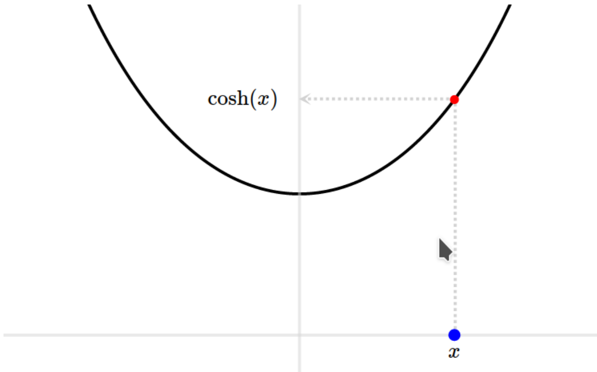
14.3.1 Dérivées

Puisque e^x est dérivable, les fonctions hyperboliques sont dérivables (et continues) sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\begin{aligned}(\sinh(x))' &= \cosh(x)\\ (\cosh(x))' &= \sinh(x)\\ (\tanh(x))' &= 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

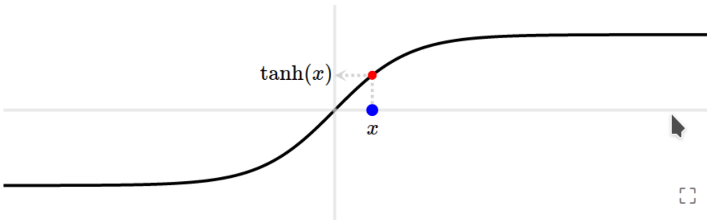
Par conséquent, $\sinh(x)$ est strictement croissante,



$\cosh(x)$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$,



et $\tanh(x)$ est strictement croissante :



14.3.2 Propriétés

Théorème 14.15. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}
\end{aligned}$$

Preuve: (exercice) □

En prenant $y = x$, on a les formules

$$\begin{aligned}
\sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x), \\
\cosh(2x) &= 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x) \\
\tanh(2x) &= \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}
\end{aligned}$$

14.3.3 Réciproques

Comme $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, continue, et puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty \,,$$

on en déduit qu'elle est bijective.

Sa réciproque se note

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{argsinh}(x) \end{aligned}$$

À l'aide de la formule pour la dérivée d'une fonction réciproque,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh}'(x) &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsinh}(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,. \end{aligned}$$

On peut en fait exprimer cette réciproque explicitement :

Lemme 34. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{argsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \,.$$

Preuve: Puisque $\sinh$ est impaire, il suffit de fixer $y \geqslant 0$, et de chercher l'unique x tel que $\sinh(x) = y$. En posant $t = e^x$, cette condition devient

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - 1/t}{2} = y \,,$$

qui est équivalente à

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \,.$$

Puisque le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(y^2+1) > 0$, elle possède une unique solution $t \geqslant 1$, donnée par

$$t = \frac{2y + \sqrt{\Delta}}{2} = y + \sqrt{1+y^2} \,.$$

On obtient $x = \log(t) = \log(y + \sqrt{1+y^2}) \geqslant 0$. $\square$

Ensuite, puisque $\cosh$ est paire, on doit restreindre son domaine si on veut la rendre injective. Comme elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\cosh : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective. De plus, comme $\cosh(0) = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty \,,$$

on conclut que $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty]$ est bijective.

Sa réciproque se note

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} : [1, +\infty[&\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \operatorname{argcosh}(x) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argcosh}'(x) &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{argcosh}(x))^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.\end{aligned}$$

On peut aussi exprimer explicitement la réciproque : pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

Finalement, $\tanh$ étant strictement croissante, continue, et puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = +1\,,$$

on en conclut que $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est bijective.
Sa réciproque se note

$$\begin{aligned}\operatorname{argtanh} :]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{argtanh}(x)\,,\end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,.$$

14.3.4 Origine du terme “hyperbolique”

(en construction)