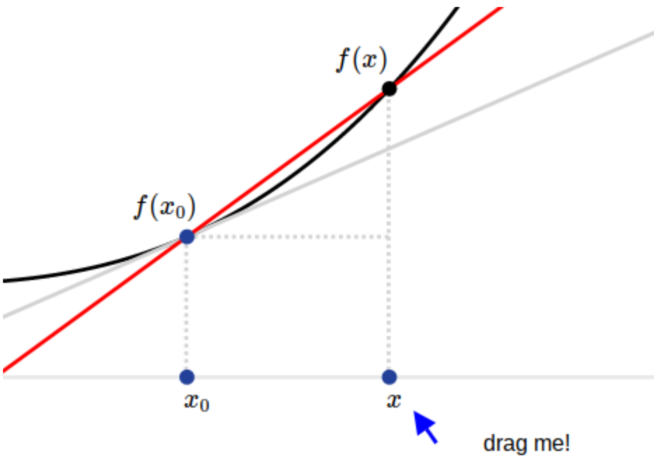
Chapitre 9

Dérivée et calcul différentiel

9.1 Définition de la dérivée, exemples

(ici, Video: v_derivee_introduction.mp4)

Une question géométrique naturelle, et très utile pour l'étude d'une fonction, est de savoir comment calculer l'équation de la droite tangente au graphe d'une fonction, en un point $(x_0, f(x_0))$:



Pour connaître l'équation de cette droite, de la forme

$$y = mx + h\,,$$

on commence par chercher sa pente m. Et quand on cherche la pente d'une droite, on a besoin de deux points sur cette droite et ici, on n'en a qu'un, à savoir le point $(x_0, f(x_0))$.

L'idée est de passer par un processus de *limite*. En effet, introduisons un deuxième point sur le graphe, $(x, f(x))$, où x est un point différent de x_0, et considérons la **sécante** passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. La pente de cette sécante est donnée par

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Lorsque x est proche de x_0, cette pente approxime celle de la droite que l'on cherche, m. Dans la limite $x \to x_0$ (tester sur l'animation ci-dessus), elle devrait même tendre exactement vers m :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m\,.$$

L'existence de la limite ci-dessus n'est pas garantie en générale.

Définition 9.1. Soit f définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans son voisinage. On dit que f est **dérivable en** x_0 si le nombre $f'(x_0)$ défini par la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe (et est fini). On appelle $f'(x_0)$ la **dérivée (ou nombre dérivé) de** f **au point** x_0.

Remarque 9.2. Dans la limite qui définit $f'(x_0)$, ci-dessus, la variable x est utilisée uniquement pour calculer la limite ; on dit qu'elle est **muette**. On donc peut écrire $f'(x_0)$ de différentes manières :

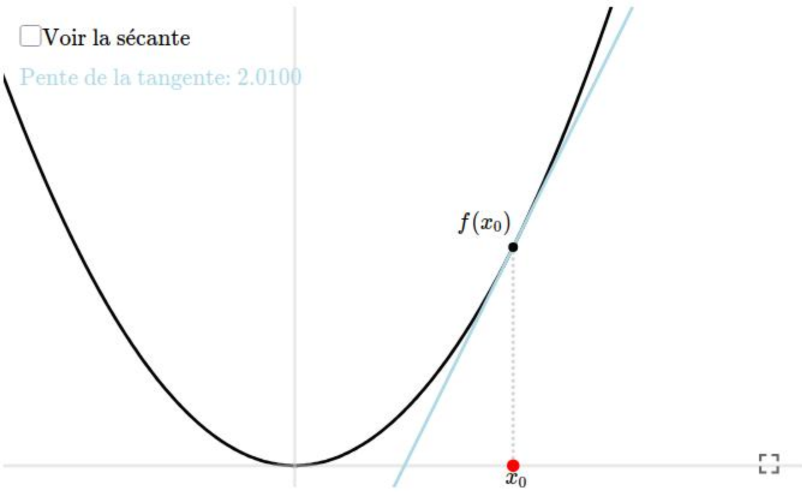
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a fait le changement de variable $h := z - x_0$. ◇

Exemple 9.3. Soit $f(x) = x^2$. Calculons sa dérivée au point $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 2\,. \end{aligned}$$

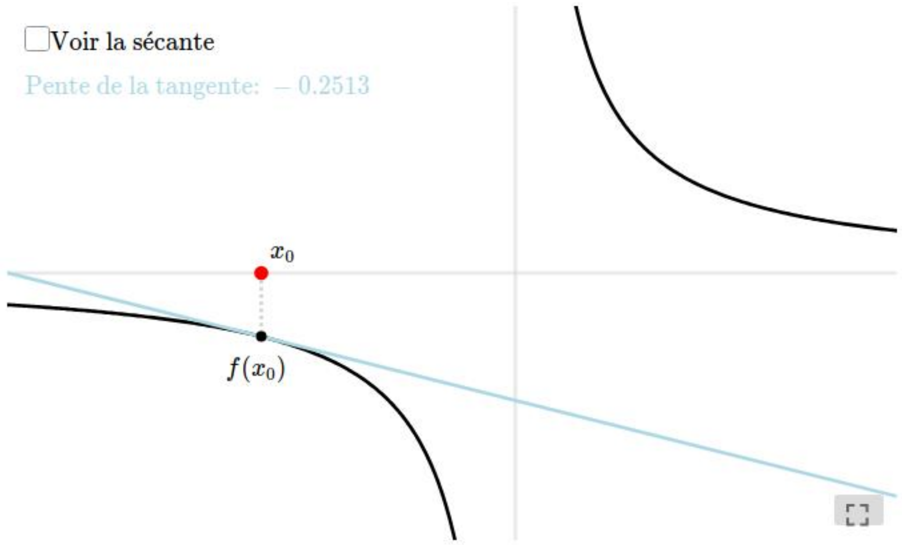
Donc la tangente à la parabole au point d'abscisse $x_0 = 1$ a une pente de 2 (voir l'animation ci-dessous). Son équation est donc de la forme $y = 2x + b$, et comme elle doit passer par le point $(1, f(1)) = (1, 1)$, on trouve $b = -1$. Donc la tangente au point $(1, 1)$ a pour équation $y = 2x - 1$. ◇



Exemple 9.4. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Au point $x_0 = -2$,

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{-2}}{x + 2} = -\frac{1}{4}\,.$$

◇



9.1.1 Origines possibles de la non-dérivabilité en un point

Voyons quelques exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables.

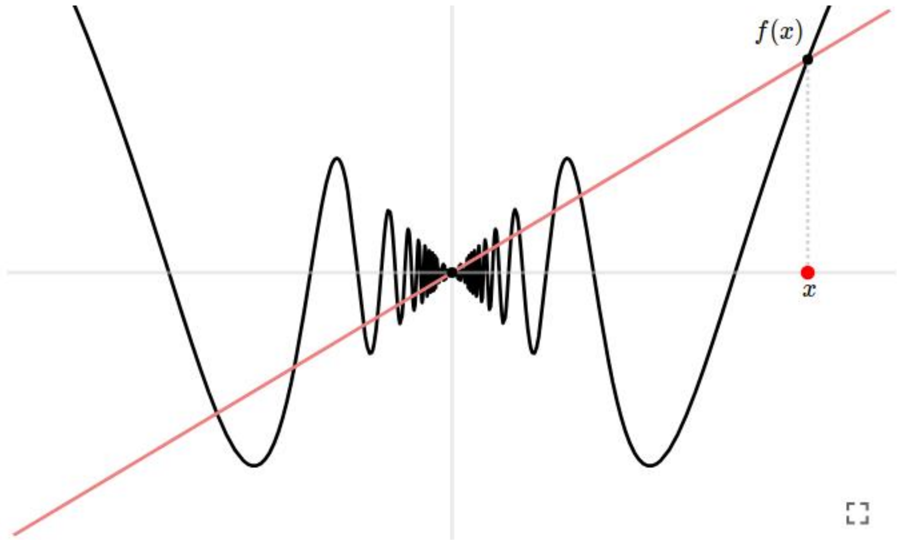
Exemple 9.5. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, le rapport donnant la pente de la droite de la sécante est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin(\tfrac{1}{x})\,,$$

qui comme on le sait ne possède pas de limite lorsque $x \to 0$. Donc f n'est pas dérivable en 0 :

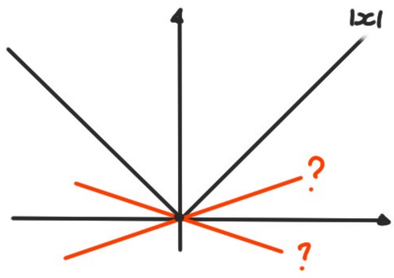


◇

Exemple 9.6. Considérons $f(x) = |x|$. Au point $x_0 = 0$, la dérivée s'obtient en prenant la limite $x \to 0$ du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\,, \\ +1 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Or ce signe n'a pas de limite quand $x \to 0$, donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. Cela fait sens du point de vue géométrique, puisqu'en ce point son graphe ne possède pas de droite tangente naturellement définie :

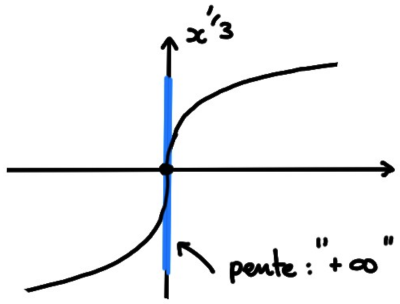


◇

Exemple 9.7. Considérons $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Au point $x_0 = 0$, la dérivée s'obtient en prenant la limite $x \to 0$ du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} .$$

Or cette limite est $+\infty$, donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. Cela fait sens du point de vue géométrique, puisqu'en ce point son graphe possède une droite tangente, mais verticale (de pente infinie) :



◇

9.1.2 Taux d'accroissement et la notation de Leibniz

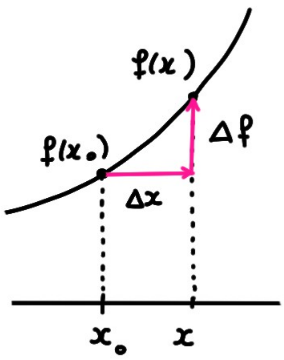
De par sa signification géométrique, la dérivée est toujours une limite d'un quotient de deux quantités qui tendent vers zéro. (C'est pour ça que les indéterminations "$\frac{0}{0}$" sont si importantes !)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Interprétons cette limite en introduisant des nouvelles notations :

- ⋆ $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ représente l'**incrément de la fonction**.
- ⋆ $\Delta x := x - x_0$ représente l'**incrément de la variable**.

D'un point de vue quantitatif, ces deux incréments sont petits lorsque x est proche de x_0 ; Δf dit exactement de combien f varie lorsque x s'écarte de x_0 d'une distance Δx :



Ensuite, l'existence de la dérivée,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} ,$$

signifie que quand l'incrément Δx est petit, alors Δf est essentiellement proportionnel à Δx, la constante de proportionnalité étant $f'(x_0)$:

$$\Delta f \simeq f'(x_0)\Delta x$$

On conclut que *la dérivée $f'(x_0)$ représente le* **taux d'accroissement local** *de f en x_0* : si on varie la variable de x_0 à $x_0 + \Delta x$, alors la valeur de la fonction passe de $f(x_0)$ à $f(x_0) + \Delta f$, où Δf est essentiellement proportionnel à Δx, comme dans la relation ci-dessus.

Informel 9.8. Si on admet pendant un instant qu'il est possible de considérer des incréments *infiniment petits*, de la fonction et de la variable, que l'on notera respectivement df et dx, alors la dérivabilité de f en x_0 signifie que ces deux infiniment petits sont proportionnels, la constante de proportionalité étant précisément la dérivée en x_0 :

$$df = f'(x_0)dx .$$

La notation suivante, appelée **notation de Leibniz**, est donc naturelle :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

9.1.3 Dérivabilité implique continuité

On l'a dit, pour que f soit dérivable en x_0, il faut que sa droite tangente soit bien définie ; elle doit être assez *lisse* en x_0. En particulier, son graphe ne peut pas faire de saut en x_0 :

Lemme 23. *Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.*

Preuve: Si f est dérivable en x_0, alors en multipliant et divisant par $x - x_0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue en x_0. □

Remarque 9.9. Attention, la réciproque de l'affirmation du lemme n'est pas vraie. C'est-à-dire que "continuité" n'implique pas "dérivabilité". Par exemple, on a vu que $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, pourtant elle est bien continue en ce point. ◇

On a vu plus haut des fonctions ($|x|$, $\sqrt[3]{x}$) qui étaient continues partout mais pas dérivables en un point. On pourrait, en adaptant ces exemples, construire des fonctions qui sont continues partout mais pas dérivables en un nombre arbitraire fini de points. Il est naturel de se poser la question de savoir s'il existe des fonctions qui sont *continues partout mais dérivables nulle part*. De telles fonctions existent...

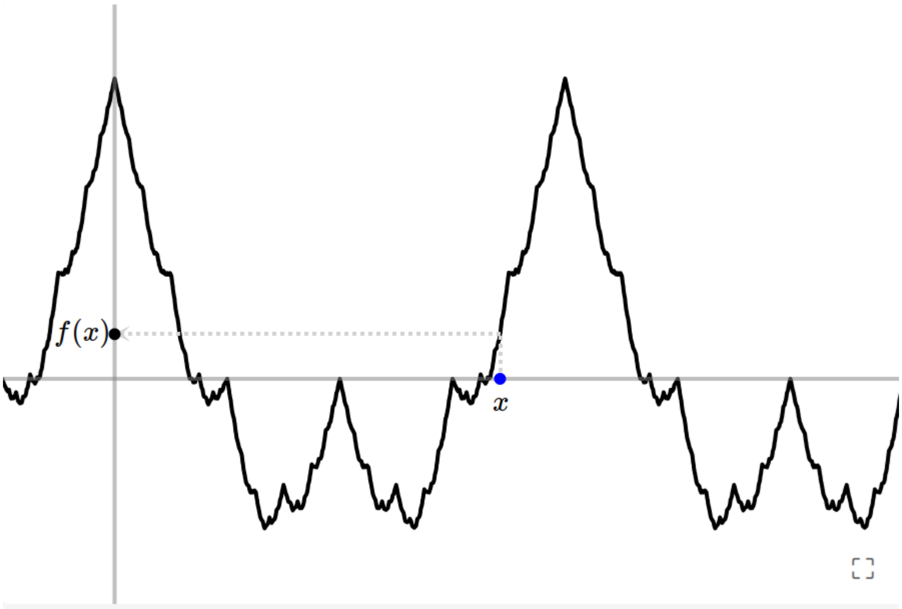
Exemple 9.10. Considérons

$$f(x) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(9^n x)}{2^n} .$$

Puisque

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(9^n x)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\,,$$

cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; elle est paire. Avec un peu plus de travail, on peut montrer qu'elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Et avec encore un peu plus de travail, on peut montrer qu'elle n'est dérivable en *aucun point* de $\mathbb{R}$. ◇



9.2 Dérivée et approximation linéaire

Répétons l'intérêt *géométrique* de la dérivabilité : lorsque f est dérivable au point x_0, le nombre $D = f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Mais la dérivabilité représente aussi un intérêt *analytique*, puisqu'elle fournit une façon particulière de représenter la fonction au voisinage de x_0.

Commençons par illustrer ce fait sur un exemple simple :

Exemple 9.11. Considérons $f(x) = x^2$ au voisinage de $x_0 = 1$. On a déjà vu dans la section précédente que f était dérivable en $x_0 = 1$, puisque

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = 2\,.$$

Si on définit, pour tout $x \neq 1$,

$$r_1(x) := \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} - 2\,,$$

alors

$$\lim_{x\to 1} r_1(x) = 0\,.$$

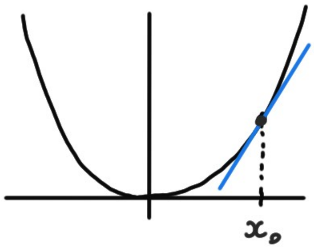
On peut de plus écrire

$$\begin{aligned}
x^2 &= 1^2 + (x^2 - 1^2)\\
&= 1^2 + \frac{x^2-1^2}{x-1}(x-1)\\
&= 1^2 + \Big(2 + \big(\frac{x^2-1^2}{x-1} - 2\big)\Big)(x-1)\\
&= 1^2 + \big(2 + r_1(x)\big)(x-1)\\
&= \underbrace{1^2}_{=f(1)} + \underbrace{2}_{f'(1)}(x-1) + r_1(x)(x-1)
\end{aligned}$$

En d'autres termes, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(1) + (f'(1) + r_1(x))(x-1)\\
&= f(1) + f'(1)(x-1) + r_1(x)(x-1)
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto f(1) + f'(1)(x-1)$ n'est autre que l'équation de la droite tangente au graphe de x^2 en $x_0 = 1$; elle *approxime* les valeurs de $f(x)$ lorsque x est proche de x_0 :



$$f(x) \simeq f(1) + f'(1)(x-1)$$

Puis, le terme "$+r_1(x)(x-1)$" est la correction qui donne l'écart entre la *vraie* fonction et son approximation. ◇

Ce que nous venons d'apprendre dans le cas $f(x) = x^2$ est vrai plus généralement :

Théorème 9.12. *Soit f une fonction définie en x_0 et dans son voisinage. Alors : f est dérivable en x_0 et sa dérivée en ce point vaut $f'(x_0) = D$ si et seulement si il existe une fonction $r_{x_0}(x)$ définie dans un voisinage épointé de x_0 telle que $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$, et telle que f peut être représentée, dans ce voisinage, comme suit :*

$$f(x) = f(x_0) + (D + r_{x_0}(x))(x - x_0)\,.$$

Preuve: Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = D$, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D\,,$$

que l'on peut écrire

$$\lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - D \right\} = 0\,.$$

Donc si on définit la fonction

$$r_{x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - D\,,$$

alors par ce qui est écrit au-dessus, cette dernière satisfait $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$. De plus, en isolant $f(x)$ dans la définition de r_{x_0}, on voit que

$$f(x) = f(x_0) + (D + r_{x_0}(x))(x - x_0)\,.$$

Inversément, si cette relation est satisfaite pour une fonction r_{x_0} satisfaisant $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D + r_{x_0}(x)\,,$$

et la limite de ce quotient existe puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D + \lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = D\,,$$

ce qui implique que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = D$. □

Une fonction dérivable en x_0 peut donc s'écrire

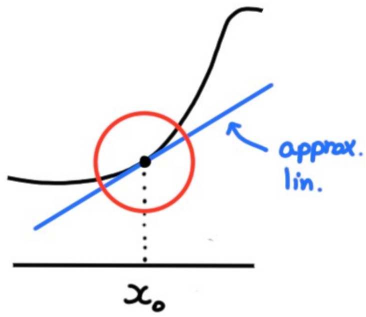
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (f'(x_0) + r_{x_0}(x))(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_{x_0}(x)(x - x_0)\,, \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$.

Cette représentation est utile si on considère x proche de x_0, car dans ce cas le terme $r_{x_0}(x)(x - x_0)$ est petit, et si on le *néglige*, on obtient une approximation de f au voisinage de x_0, appelée l'**approximation linéaire** :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette approximation est celle qui consiste simplement à approximer le graphe de f, proche de x_0, par celui de sa droite tangente au point $(x_0, f(x_0))$:



9.2.1 Sur les deux premiers niveaux de régularité d'une fonction

On a pour l'instant deux notions de régularité pour une fonction f au voisinage d'un point x_0. Décrivons ce qu'elle représente en qualité d'approximation.

- ⋆ La *continuité* : Si f est continue en x_0, alors les valeurs de $f(x)$ sont proches de $f(x_0)$ lorsque x est proche de x_0, qui est une **approximation d'ordre zéro** de f au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0)}$$

- ⋆ La *dérivabilité* : Si f est dérivable en x_0, alors elle peut être représentée comme ci-dessus, et si on néglige $r_{x_0}(x)$, on obtient l'**approximation linéaire**, appelée aussi **approximation du premier ordre**, de f au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

L'approximation à l'ordre zéro revient à approximer $f(x)$ par la constante $f(x_0)$, mais l'approximation linéaire est plus précise, puisqu'elle tient compte de comment f *varie* au voisinage de x_0 !

Comparons ces approximations sur un exemple simple :

Exemple 9.13. Supposons que l'on veuille calculer 1.998^4.

Écrivons $1.998^4 = f(1.998)$, où $f(x) = x^4$. Ce que l'on aimerait faire est donc d'estimer la valeur de f en un point $x = 1.998$ qui est proche de $x_0 = 2$.

- ⋆ À l'ordre zéro,
$$1.998^4 = f(1.998) \simeq f(2) = 2^4 = 16\,.$$

- ⋆ Au premier ordre,
$$\begin{aligned} 1.998^4 = f(1.998) &\simeq f(2) + f'(2)(1.998 - 2) \\ &= 2^4 + 4 \cdot 2^3(1.998 - 2) \\ &= 15.936 \end{aligned}$$

Sachant que la vraie valeur est $1.998^4 = 15.9360959...$, l'approximation à l'ordre zéro représente donc une erreur d'environ 0.4%, alors que celle du premier ordre, moins de 0.001% ! ◇

Nous verrons plus tard comment aller au-delà de l'approximation linéaire, lorsque nous calculerons des *développements limités*.

9.3 Règles de dérivation

(ici, Video: v_derivee_regles.mp4)

Pour l'instant, la dérivée associe à une fonction f et un point x_0 le nombre $f'(x_0)$. Si on sait calculer la dérivée en chaque point x_0 du domaine de f, la dérivée devient une nouvelle fonction,

$$x_0 \mapsto f'(x_0)\,,$$

et comme on aimerait plutôt voir x_0 comme un variable, on écrira plutôt

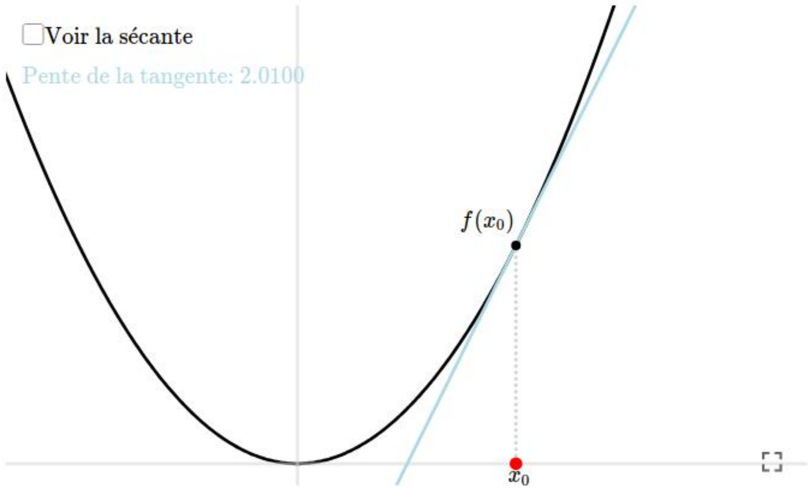
$$x \mapsto f'(x)\,.$$

On dira que f, définie sur un ouvert, est **dérivable** si elle est dérivable en tout point x_0 de son ensemble de définition, et donc si sa **dérivée** f' est définie en tout point de cet ouvert.

Exemple 9.14. La fonction $f(x) := x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$. En effet, pour un $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0 h + h^2) - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) \\ &= 2x_0\,. \end{aligned}$$

◇



9.3.1 Sommes et produits

Pour commencer, montrons que si deux fonctions sont dérivables en un point, alors leur somme et leur produit le sont aussi, et donnons les expressions des dérivées de ces fonctions :

Proposition 10. *Soient f, g dérivables en un point x_0. Alors la somme et le produit de f et g sont dérivables en x_0, et*

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

La deuxième propriété implique en particulier que pour toute constante C,

$$(Cf(x))' = Cf'(x)\,.$$

En effet, la dérivée d'une fonction constante est nulle : $C' = 0$.
Preuve: En écrivant la définition de la dérivée de $f+g$ en x_0 et en réarrangeant un peu les termes,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right\} \\ &= f'(x_0)+g'(x_0)\,.\end{aligned}$$

Cette dernière montre que $f+g$ est dérivable en x_0, et que sa dérivée en ce point vaut $f'(x_0)+g'(x_0)$. Par définition, la dérivée de $f \cdot g$ en x_0 est

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

En insérant $\pm f(x_0)g(x)$ au numérateur, et en réarrangeant l'expression obtenue,

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, on a utilisé le fait que f et g sont toutes deux dérivables en x_0. On a également utilisé le fait suivant : puisque g est dérivable en x_0, elle est continue en ce point, et donc $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. □

9.3.2 Composées et quotients

Rappelons que la composée de deux fonctions f et g, lorsqu'elle est bien définie, est donnée par $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Proposition 11. *Soit g dérivable au point x_0, et f dérivable au point $a = g(x_0)$. Alors $f \circ g$ est dérivable au point x_0, et*

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

Preuve: Étudions

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} .$$

- ⋆ Puisque g est dérivable en x_0, il existe une fonction r_{x_0} telle que

$$g(x_0+h) = \underbrace{g(x_0)}_{=a} + \underbrace{(g'(x_0) + r_{x_0}(h))h}_{=:H} .$$

  Remarquons que $H \to 0$ lorsque $h \to 0$.
- ⋆ Puis, comme f est dérivable en a, il existe une fonction $\tilde{r}_a(H)$ telle que

$$f(a+H) = f(a) + (f'(a) + \tilde{r}_a(H))H .$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(g(x_0+h)) = f(a+H) &= f(a) + (f'(a) + \tilde{r}_a(H))H \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))H + \tilde{r}_a(H)H , \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{(f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} &= \big(f'(g(x_0)) + \tilde{r}_a(H)\big)\frac{H}{h} \\ &= \big(f'(g(x_0)) + \tilde{r}_a(H)\big)(g'(x_0) + r_{x_0}(h)) \end{aligned}$$

Mais lorsque $h \to 0$, $\tilde{r}_a(H) \to 0$ et $r_{x_0}(h) \to 0$, et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

ce qu'on voulait démontrer. □

Comme conséquence, on peut maintenant dériver d'autres types de fonctions, comme des quotients :

Proposition 12. *Soient f, g dérivables en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} .$$

Preuve: On commence par utiliser la règle de dérivation d'une composée pour dériver l'inverse de g en x_0 :

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

On voit ensuite le quotient comme un produit, on dérive ce produit, et on met tout le monde au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \Big(f\cdot\frac{1}{g}\Big)'(x_0) &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0)\\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}\Big)\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.\end{aligned}$$

□

On verra comment obtenir une formule pour $(f(x)^{g(x)})'$ dans la section suivante.

9.4 Dérivées des fonctions élémentaires

(ici, Video: v_derivee_fondamentales.mp4)

Les règles de dérivation vues dans la section précédente permettent de calculer, en principe, la dérivée de n'importe quelle fonction, tant que celle-ci est obtenue par combinaisons (sommes ou différences, produits ou quotients, composées) d'autres fonctions plus simples que l'on sait déjà dériver. Il est donc important de connaître les dérivées des fonctions élémentaires.

Ci-dessous, $(\dots)'$ indique la dérivation par rapport à la variable x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

Preuve: On démontre la formule par récurrence sur n. La formule est valide pour $n = 1$ et $n = 2$ (voir plus haut). Si on suppose la formule valide pour n, alors par la règle de dérivation d'un produit,

$$(x^{n+1})' = (x\cdot x^n)' = 1\cdot x^n + x\cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n\,.$$

□

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x\,.}$$

Preuve: Montrons que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)\,.$$

En utilisant la formule de trigonométrie pour le sinus d'une somme,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\,,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{\big(\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)\big)-\sin(x_0)}{h}\\ &= \sin(x_0)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1}\cos(x_0)\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a fait

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}h\frac{\cos(h)-1}{h^2}=0\cdot(-\tfrac{1}{2})=0\,.$$

□

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x\,.}$$

Preuve: On utilise le fait que $\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, et la formule pour la dérivée d'une composée :

$$\begin{aligned}(\cos(x))'&=(\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))'\\&=\cos(\tfrac{\pi}{2}-x)\cdot(\tfrac{\pi}{2}-x)'\\&=\sin(x)\cdot(-1)\end{aligned}$$

□

$$\boxed{(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos(x)^2}\,.}$$

Preuve: Par la formule pour la dérivée d'un quotient,

$$(\tan(x))'=\Big(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big)'=\frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2}$$

□

$$\boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}\,,\qquad x>0\,.}$$

Preuve: On calcule, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}(\log(x))'&=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x(1+\frac{h}{x}))-\log(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(\log(x)+\log(1+\frac{h}{x}))-\log(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h}\\&=\frac{1}{x}\Big\{\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\Big\}\\&=\frac{1}{x}\Big\{\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}\Big\}\\&=\frac{1}{x}\,.\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne, on a posé $t=\frac{h}{x}$, et utilisé le fait que si $h\to 0$, alors $t\to 0$. On a ensuite utilisé $\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$, que nous avons étudiée **ici** (lien vers la section `m_fonctions_limite_quelques_limites`). □

$$\boxed{(e^x)'=e^x\,.}$$

NumChap: chap-calcul-differentiel, Dernière compilation: 2025-09-04 13:37:16+02:00. (Version Web: botafogo.saitis.net)

Preuve:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h}\\ &= e^x\left\{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right\}\\ &= e^x\end{aligned}$$

Voir les commentaires sur **blackpenredpen** (lien web). □

$$\boxed{(a^x)' = \log(a)a^x}\,.$$

Preuve: En exponentiant, $a = e^{\log(a)}$,

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{x\log(a)})'\\ &= \log(a)e^{x\log(a)}\\ &= \log(a)a^x\,.\end{aligned}$$

□

$$\boxed{(\log_a(x))' = \frac{1}{x\log(a)}}$$

Preuve: Par la formule du changement de base pour le logarithme,

$$(\log_a(x))' = \Big(\frac{\log(x)}{\log(a)}\Big)' = \frac{1}{\log(a)}(\log(x))' = \frac{1}{\log(a)}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

□

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,,\quad x>0\,.}$$

Preuve: En exponentiant, $x = e^{\log(x)}$ ($x>0$),

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\log(x)})' = e^{\alpha\log(x)}(\alpha\log(x))' = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

□

Pour finir, étudions la dérivation des fonctions du type "$f(x)^{g(x)}$". Pour commencer, il faut noter que de telles fonctions sont bien définies uniquement lorsque $f(x)>0$. Dans ce cas, puisque $f(x)>0$, son logarithme est bien défini et on peut l'**exponentier**

$$f(x) = e^{\log(f(x))}\,.$$

Ce qui motive la *définition* suivante :

$$f(x)^{g(x)} := e^{g(x)\log(f(x))}\,.$$

Si on veut dériver une telle fonction, on devra donc s'assurer que $f(x)>0$ dans le voisinage du point considéré. On pourra alors appliquer les règles de dérivation démontrées plus haut, ainsi que les dérivées de l'exponentielle et du logarithme, pour calculer :

$$\begin{aligned}(e^{g(x)\log(f(x))})' &= e^{g(x)\log(f(x))}(g(x)\log(f(x)))'\\ &= \Big(g'(x)\log(f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x))\Big)e^{g(x)\log(f(x))}\end{aligned}$$

Exemple 9.15. Considérons, pour $x > 0$, la fonction

$$h(x) = x^x .$$

Remarquons que $h(x)$ n'est ni de la forme x^α, ni de la forme a^x, mais bien du type $f(x)^{g(x)}$, on doit donc la considérer comme définie à l'aide d'une exponentiation :

$$h(x) := e^{x\log(x)} .$$

On la dérive alors sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant les règles de dérivation :

$$\begin{aligned} h'(x) = (e^{x\log(x)})' &= e^{x\log x}(x\log x)' \\ &= (\log(x) + x\tfrac{1}{x})e^{x\log x} \\ &= (\log(x)+1)x^x . \end{aligned}$$

◇

9.5 Dérivée d'une fonction réciproque

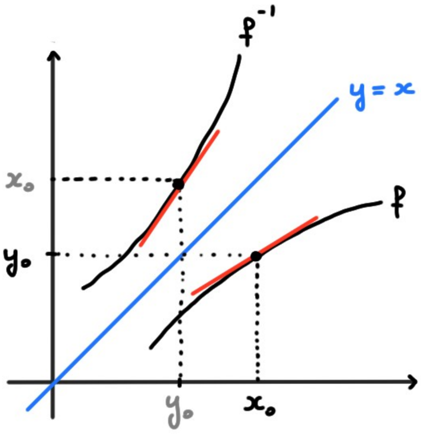
Théorème 9.16. *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, et $f : I \to F$ une fonction bijective (en particulier, $F = \mathrm{Im}(f)$), dont la réciproque est notée $f^{-1} : F \to I$. Soit encore $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

Avant de donner la preuve, donnons une explication graphique de la formule énoncée dans le théorème :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

Pour commencer, rappelons que le graphe de la fonction réciproque f^{-1} du graphe de f à travers la diagonale (pour ce rappel, voir **ici** (lien vers la section `m_fonctions_generalites_fonctions_reelles`)) :



Or la réflexion d'une droite de pente $m \neq 0$ à travers la diagonale est une droite de pente $\frac{1}{m}$. On s'attend donc à ce que la dérivée de f^{-1} au point (y_0, x_0) soit égale à l'inverse de la dérivée de f au point (x_0, y_0) :

Preuve: Pour étudier la dérivée de la réciproque f^{-1} au point $y_0 = f(x_0)$, on considère le quotient est

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} .$$

Comme f est bijective, on peut associer à tout y proche de y_0 son unique préimage, $x = f^{-1}(y)$. Clairement, $y \to y_0$ implique $x \to x_0$. On peut donc récrire la limite

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} .$$

Puisque $f'(x_0) \neq 0$, le dénominateur de cette dernière fraction est non nul dès que x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire lorsque y est suffisamment proche de y_0.

Maintenant, en prenant la limite,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .\end{aligned}$$

□

Informel 9.17. Pour se souvenir de la formule, on peut partir de la relation qui définit la fonction réciproque

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in F .$$

Puis, *en supposant que la réciproque est dérivable*, dériver par rapport à y des deux côtés. Du côté gauche, on dérive une composée, donc

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1 .$$

On retrouve donc bien

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} .$$

Exemple 9.18. Supposons qu'on connaît $(e^x)' = e^x$ mais qu'on ne sait plus dériver $\log(x)$. Comme elles sont réciproques l'une de l'autre, que $f(x) = e^x$ est dérivable partout et que sa dérivée n'est jamais nulle, on a

$$e^{\log(y)} = y ,$$

que l'on dérive par rapport à y,

$$\underbrace{e^{\log(y)}}_{=y}(\log(y))' = 1$$

On retrouve alors :

$$(\log(y))' = \frac{1}{y} .$$

◇

Dérivons maintenant les réciproques des fonctions trigonométriques.

Exemple 9.19. Rappelons que la réciproque du sinus est

$$\begin{aligned}\arcsin : [-1, 1] &\to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x)\end{aligned}$$

Par définition,

$$y = \sin(\arcsin(y)) \qquad \forall y \in [-1, 1]$$

Puisque la dérivée du sinus ne s'annule nulle part sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, le théorème garantit que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$. En prenant la dérivée par rapport à y des deux côtés de cette dernière identité : si $y\in]-1,1[$,

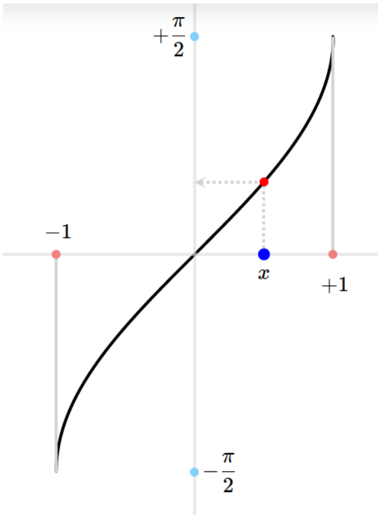
$$1=\big(\sin(\arcsin(y))\big)'=\cos(\arcsin(y))(\arcsin(y))'\,.$$

Comme l'angle $\arcsin(y)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, son cosinus est positif, et donc

$$\cos(\arcsin(y))=\sqrt{1-\sin(\arcsin(y))^2}=\sqrt{1-y^2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{(\arcsin(y))'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\qquad\forall y\in]-1,1[}$$



◇

Exemple 9.20. Rappelons que la réciproque du cosinus est

$$\begin{aligned}\arccos:[-1,1]&\to[0,\pi]\\ x&\mapsto\arccos(x)\end{aligned}$$

Par définition,

$$y=\cos(\arccos(y))\qquad\forall y\in[-1,1]$$

Puisque la dérivée du cosinus ne s'annule nulle part sur $]0,\pi[$, le théorème garantit que $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$. On calcule sa dérivée en prenant la dérivée par rapport à y des deux côtés de cette dernière identité : si $y\in]-1,1[$,

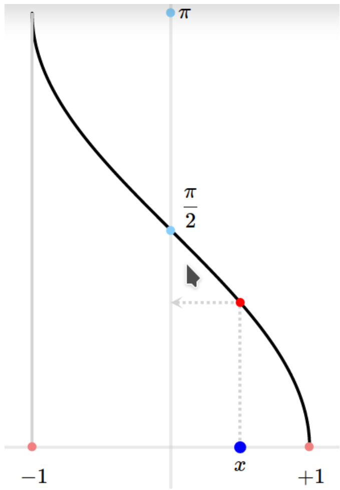
$$1=\big(\cos(\arccos(y))\big)'=-\sin(\arccos(y))(\arccos(y))'\,.$$

Comme l'angle $\arccos(y)\in]0,\pi[$, son sinus est positif, et donc

$$\sin(\arccos(y))=\sqrt{1-\cos(\arccos(y))^2}=\sqrt{1-y^2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{(\arccos(y))'=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\qquad\forall y\in]-1,1[}$$



◇

Exemple 9.21. Rappelons que la réciproque de la tangente est

$$\begin{aligned}\arctan : \mathbb{R} &\to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x)\end{aligned}$$

Par définition,

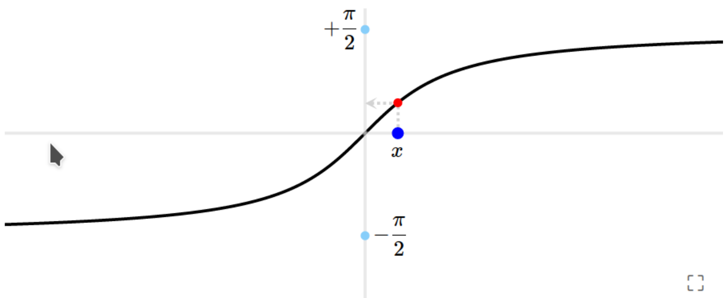
$$y = \tan(\arctan(y)) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Comme la dérivée de la tangente ne s'annule nulle part sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan$ est dérivable partout sur $\mathbb{R}$. En dérivant rapport à y des deux côtés de cette dernière identité,

$$\begin{aligned}1 &= \big(\tan(\arctan(y))\big)'\\ &= (1+\tan^2(\arctan(y)))(\arctan(y))'\\ &= (1+y^2)(\arctan(y))'\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{(\arctan(y))' = \frac{1}{1+y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}\,.}$$



◇

9.6 Dérivées latérales

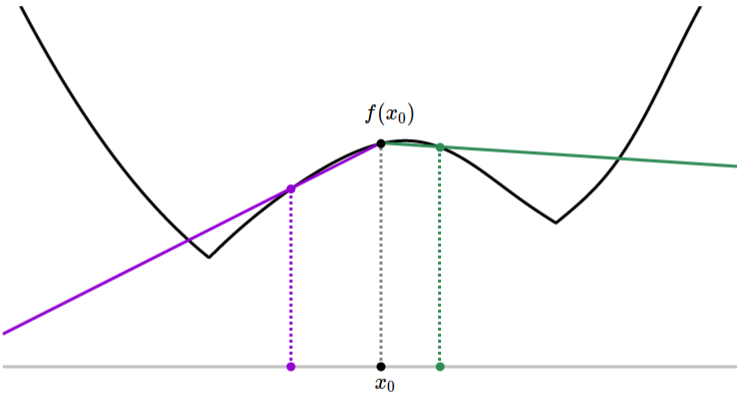
Pour parler de la *dérivabilité* d'une fonction en un point x_0, il faut que cette fonction soit définie dans un voisinage épointé de x_0. Ceci signifie en particulier que f doit être définie *des deux côtés de* x_0.

Si f n'est définie que d'un côté de x_0, on peut tout de même introduire une notion de *dérivée latérale* :

Définition 9.22. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

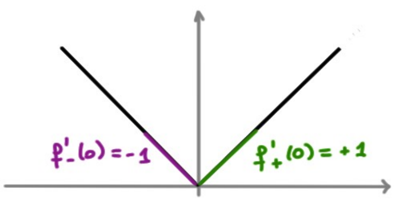
- ⋆ Soit f définie en x_0 et dans un voisinage à gauche. On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 si le nombre $f'_-(x_0)$ défini par la limite
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe (et est fini). On appelle $f'_-(x_0)$ la **dérivée à gauche en** x_0.
- ⋆ Soit f définie en x_0 et dans un voisinage à droite. On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 si le nombre $f'_+(x_0)$ défini par la limite
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe (et est fini). On appelle $f'_+(x_0)$ la **dérivée à droite en** x_0.

Observons que la dérivabilité à gauche (resp. à droite) en x_0 implique qu'il existe une droite tangente à gauche (resp. à droite) au point $(x_0, f(x_0))$.



Il peut donc exister des fonctions qui peuvent être dérivables à gauche ou à droite en un point, mais sans être dérivable en ce point.

Exemple 9.23. On sait que $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$:



Pourtant, ses dérivées latérales existent en 0, puisque
$$f'_\pm(0) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{\pm x}{x} = \pm 1 \,.$$
◇

L'existence et l'égalité des dérivées latérales en un point entraîne la dérivabilité en ce point :

Théorème 9.24. *f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent et sont égales (et dans ce cas, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$).*

Preuve: Par définition,

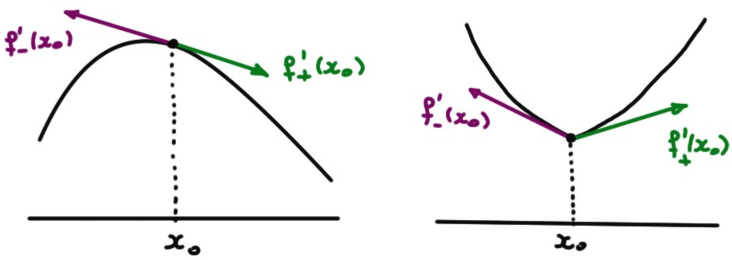
$$
\begin{aligned}
f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,,\\
f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.
\end{aligned}
$$

Donc ces deux limites existent et sont égales si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe et prend la même valeur. □

Informel 9.25. Donc si les dérivées latérales existent et sont égales, la fonction est dérivable (image de gauche ci-dessous), et si les dérivées latérales existent toutes les deux mais que leurs valeurs sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable, et son graphe fait un "coude" au point x_0 (image de droite ci-dessous) :



9.6.1 Fonctions définies par morceaux

Soient f, g deux fonctions définies sur toute la droite, et $x_* \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f suivante, définie par morceaux :

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leqslant x_*\,,\\ h(x) & \text{si } x > x_*\,. \end{cases}$$

Si f est continue en x_*, on pourra tester la dérivabilité de f en x_*, par le théorème précédent, en calculant les dérivées latérales de f en x_*, et en vérifiant qu'elle sont égales.

Exemple 9.26. Étudions la dérivabilité de

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = 3 - x^2 & \text{si } x \leqslant 1\,,\\ h(x) = x^3 - 3x^2 + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

au point $x_* = 1$. Remarquons que f est continue en ce point puisque

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)\,,$$

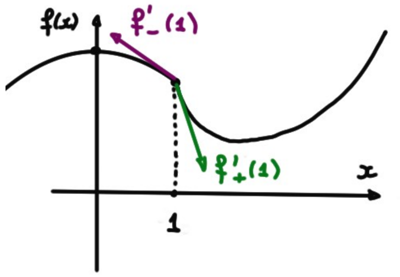
qui est également égale à $f(1) = 2$.

Pour tester la dérivabilité,

$$
\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{(3-x^2)-2}{x-1} = -2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^3-3x^2+4)-2}{x-1} = -3 \end{aligned}$$

Comme $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, f n'est pas dérivable en 1.



◇

Exemple 9.27. Soit

$$f(x) := \begin{cases} x^2+ax+1 & \text{si } x<0\,, \\ \sin(2x)+b & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Remarquons qu'en dehors de 0, f est partout dérivable, quelles que soient les valeurs de a et b. Déterminons les paramètres a, b de manière à ce que f soit dérivable en $x_0 = 0$.

Pour être dérivable en 0, il faut d'abord que f soit continue en 0. Commençons donc par assurer que f est continue en 0. Pour cela, remarquons que $f(0) = \sin(2\cdot 0)+b = b$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sin(2x)+b) = b\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+ax+1) = 1\,.$$

Pour avoir la continuité en 0, on doit donc imposer $b=1$.

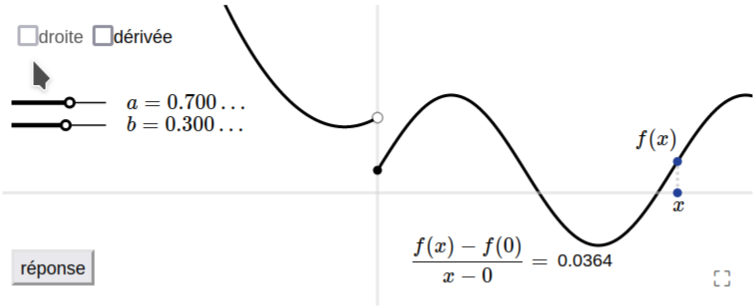
Passons à la dérivabilité en 0. Puisqu'on peut dorénavant considérer que $b=1$, on calcule d'abord

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h^2+ah+1)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} (a+h) = a\,, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sin(2h)+1)-1}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(2h)}{h} = 2\,. \end{aligned}$$

Comme f est dérivable en 0 si et seulement si $f'_-(0) = f'_+(0)$, la seule possibilité est d'imposer $a = 2$. ◇



9.7 Dérivées d'ordres supérieurs

On verra, plus tard, que les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction jouent un rôle important dans l'analyse fine de cette fonction au voisinage d'un point (voir en particulier la *Formule de Taylor*).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en chaque point de l'intervalle ouvert I. On note sa dérivée, qui est la **première dérivée**,

$$f^{(1)} := f' .$$

Ensuite, si $f^{(1)} : I \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable, on dit que f est **deux fois dérivable sur** I, et on note sa deuxième dérivée comme suit :

$$f^{(2)} := (f^{(1)})' .$$

Aussi, pour $k \geqslant 2$, si la $(k-1)$-ème dérivée $f^{(k-1)} : I \to \mathbb{R}$ existe et est dérivable sur I, on dit que f est k **fois dérivable sur** I, et on note sa k-ème dérivée comme suit :

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' .$$

Remarquons que si $f^{(k)}$ existe, cela entraîne que $f^{(k-1)}$ est dérivable, et donc en particulier continue.

Exemple 9.28. Si $f(x) = x^m$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= mx^{m-1}\\
f^{(2)}(x) &= m(m-1)x^{m-2}\\
f^{(3)}(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3}\\
&\vdots\\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!\,.
\end{aligned}$$

Puisque $f^{(m)}$ est une fonction constante, les dérivées d'ordre supérieur à m sont toutes nulles : pour tout $k > m$,

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

◇

Exemple 9.29. Si $f(x) = \sin(\omega x)$, où ω est une constante. On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \omega\cos(\omega x)\\
f^{(2)}(x) &= -\omega^2\sin(\omega x)\\
f^{(3)}(x) &= -\omega^3\cos(\omega x)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On peut écrire explicitement la k-ème dérivée, comme une fonction de k. En effet, en utilisant les relations

$$\sin(z + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(z)\,,$$
$$\sin(z + \pi) = -\sin(z)\,,$$

on a

$$f^{(k)}(x) = \omega^k \sin(\omega x + k\tfrac{\pi}{2})\,.$$

◇

Remarque 9.30. On ne peut pas toujours exprimer une grande dérivée aussi explicitement en fonction de k ! ◇

9.8 Fonctions continûment dérivables

(ici, Video: v_derivee_C1.mp4)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Un premier niveau de régularité que l'on a rencontré, pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est celui de *continuité*. Ensuite, on a vu que la *dérivabilité* est un niveau de régularité plus fort (dans le sens où toute fonction dérivable est continue).

Il est naturel d'introduire un niveau de régularité encore supérieur, plus fort que la dérivabilité, en exigeant que la dérivée soit elle-même continue :

Définition 9.31. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point de I. Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est **continûment dérivable** sur I. On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I.

Exemple 9.32. Sur $I = \mathbb{R}$, considérons $f(x) = x^2\sin(x)$. Puisque f est un produit d'un polynôme (dérivable) par un sinus (dérivable aussi), elle est dérivable. De plus,

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)\,.$$

Comme f' est une combinaison linéaire de produits de polynômes par des sinus et cosinus, elle est elle-même continue. On en déduit que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$: $f \in C^1(\mathbb{R})$. ◇

Exemple 9.33. Sur $]0,1[$, considérons $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors f est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Comme f' est aussi continue sur $]0,1[$, ceci implique que f est continûment dérivable sur $]0,1[$: $f \in C^1(]0,1[)$. ◇

Les polynômes, les fonctions trigonométriques, etc. sont des fonctions continûment dérivables sur leur ensemble de définition.

Bien-sûr, une fonction qui n'est pas dérivable en un point n'est pas continûment dérivable. Mais il est aussi possible qu'une fonction soit dérivable partout, sans être continûment dérivable :

Exemple 9.34. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{5}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

On remarque que f est continue en tout point, en particulier en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)\,.$$

Ensuite, f est dérivable en tout point $x \neq 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée se calcule à l'aide des règles de dérivation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,. \end{aligned}$$

Ensuite, f est aussi dérivable en 0, puisque

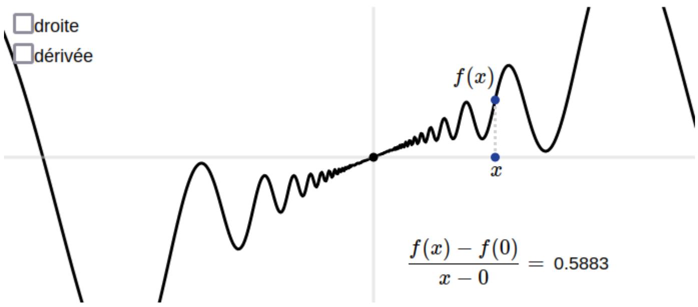
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5}\sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Testons maintenant la *continuité de* f'. Clairement, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, puisque par l'expression ci-dessus ce n'est qu'une combinaison de fonctions continues :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Pourtant, on remarque que lorsque $x \to 0$, $f'(x)$ n'a pas de limite, ce qui est dû à la présence de $\frac{1}{5}\cos(\frac{1}{x})$. Ce terme n'ayant pas de limite en 0, f' n'est pas continue en 0. Ceci fait de f une fonction qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas continûment dérivable. ◇



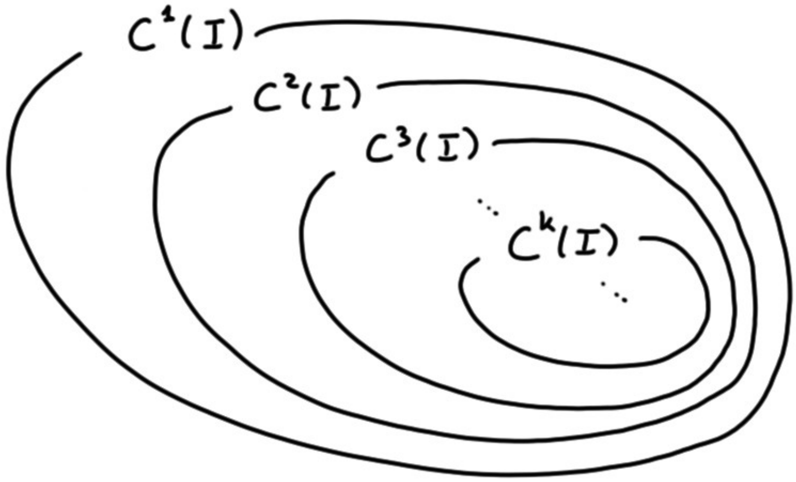
9.8.1 Fonctions k fois continûment dérivables

Définition 9.35. $C^k(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, k fois dérivables, telles que $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ existent et sont continues sur I. On dit qu'une telle fonction est **de classe** C^k **(sur** I**)**.

Informel 9.36. Plus l'indice k est grand, plus une fonction $f \in C^k$ est *régulière*.

Remarquons que si f est $k+1$ fois dérivable sur I, alors elle est de classe C^k. On a donc les inclusions suivantes :

$$C^1(I) \supset C^2(I) \supset \cdots \supset C^k(I) \supset C^{k+1}(I) \supset \cdots$$



Exemple 9.37. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Alors

$$f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = \cdots = e^x \,,$$

donc $f \in C^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \geqslant 1$. ◇

Exemple 9.38. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} +x^2 & \text{si } x \geqslant 0\,, \\ -x^2 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Montrons que $f \in C^1(\mathbb{R})$. D'abord, f est clairement dérivable en tout point x_0. En effet, si $x > 0$ alors $f'(x) = (x^2)' = 2x$, et si $x < 0$ alors $f'(x) = (-x^2)' = -2x$. Il faut maintenant considérer $x_0 = 0$. Par un calcul direct,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h^2}{h} = 0\,,$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0\,.$$

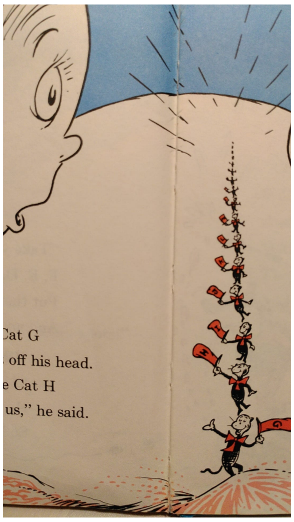
Donc $f'(0) = 0$. Ainsi, f est dérivable partout, et on peut écrire sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} +2x & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -2x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Plus simplement :

$$f'(x) = 2|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Puisque $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Mais comme f' n'est pas dérivable en 0, on a aussi que $f \notin C^2(\mathbb{R})$. ◇



9.9 Extréma locaux et le Théorème de Rolle

On a défini **ici** (lien vers la section `m_fonctions_maximum_minimum_supremum_infimum`) la notion de *maximum/minimum global* pour une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$.

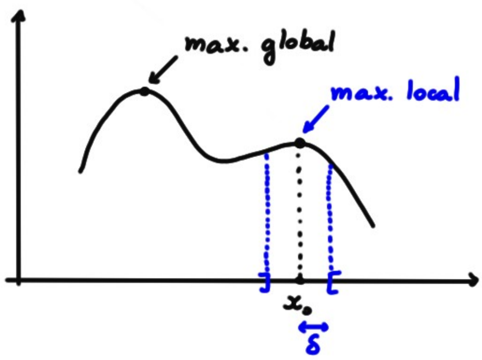
Définition 9.39. Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. On dit que

- ⋆ f **possède un maximum local en** x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,.$$

- ⋆ f **possède un minimum local en** x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,.$$



Bien-sûr, un maximum/minimum global est aussi local.

Le point de départ de cette section est le résultat suivant. Il suggère que la dérivée peut s'avérer être un outil pour la recherche de minimums/maximums :

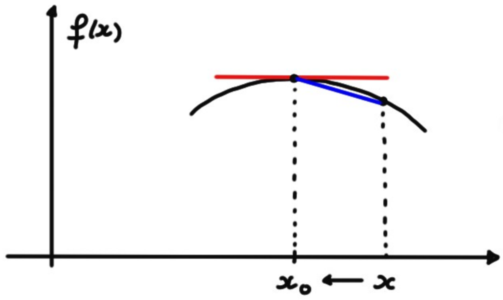
Lemme 24. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Si f possède un minimum/maximum local en x_0, et si f est dérivable en x_0, alors*

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Preuve: Supposons que f possède un maximum local en x_0 : $\exists \delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in I :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

- ⋆ Si $x \in I$, $x > x_0$, on a toujours $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ puisque x_0 est un maximum local, et donc aussi (puisque $x - x_0 > 0$)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$



En prenant $x \to x_0^+$, cela donne

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0\,.$$

- ⋆ En procédant de même pour un $x < x_0$, on

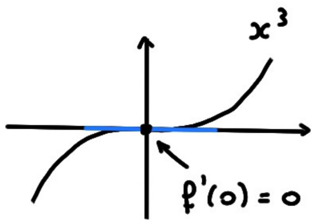
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0\,,$$

et donc en prenant $x \to x_0^-$, on montre que $f'(x_0) \geqslant 0$.

Puisque f est dérivable en x_0, on doit avoir $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, et puisque ce nombre est à la fois $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$, on a $f'(x_0) = 0$. □

L'affirmation réciproque n'est pas vraie : si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, cela *n'implique pas* que f possède un minimum ou un maximum local en x_0 !

Exemple 9.40. Prendre par exemple $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0$:



Comme $f'(x) = 3x^2$, on a $f'(0) = 0$, bien que 0 ne soit ni un minimum ni un maximum local. ◇

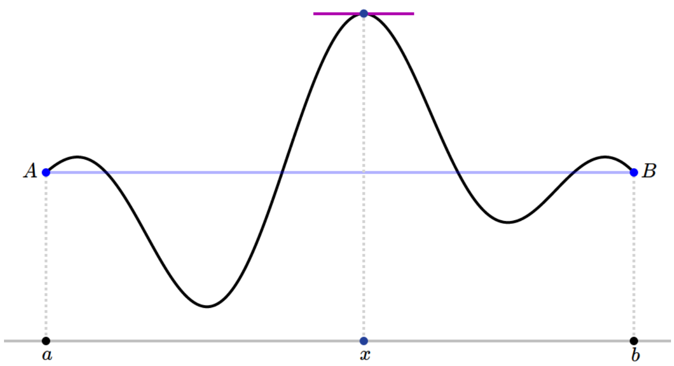
Théorème 9.41 (Théorème de Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0\,.$$

Preuve: Si f est constante, $f(a) = f(x) = f(b)$ pour tout $x \in]a, b[$, sa dérivée est nulle et donc on peut prendre n'importe quel point $c \in]a, b[$, et avoir $f'(c) = 0$.

Supposons donc que f n'est pas constante. Comme f est continue sur l'intervalle compacte $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point $x^* \in [a, b]$, et son minimum en un point $x_* \in [a, b]$. Comme f n'est pas constante, au moins un de ces points se trouve strictement à l'intérieur de l'intervalle. Supposons que c'est $x^* \in]a, b[$. Comme x^* est un maximum global, c'est aussi un maximum local, et par le lemme précédent $f'(x^*) = 0$. □

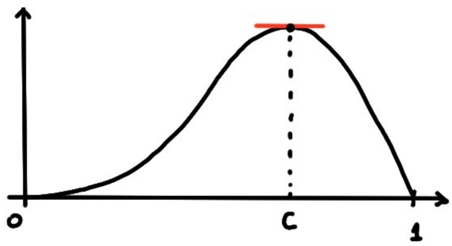
L'interprétation géométrique du Théorème de Rolle est claire : si le graphe d'une fonction lisse (continue et dérivable) part d'un point $A = (a, f(a))$ et arrive en un point $B = (b, f(b))$ qui est à la même hauteur que A, alors il existe au moins un point de son graphe où la droite tangente est horizontale :



Exemple 9.42. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \sin(\pi x^2) \cos(x) .$$

Comme f est continue et dérivable, et comme $f(0) = f(1) = 0$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.



Dans ce cas, c est solution de l'équation non-linéaire

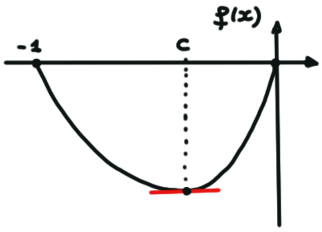
$$2\pi c \cos(\pi c^2) \cos(c) - \sin(\pi c^2) \sin(c) = 0 ,$$

et ne peut pas être donné explicitement. ◇

Parfois, le point c peut se calculer explicitement :
Exemple 9.43. Soit $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := x^4 + x .$$

On a $f(-1) = f(0) = 0$, et donc par le Théorème de Rolle il existe $c \in] - 1, 0[$ tel que $f'(c) = 0$.



De plus, comme $f'(x) = 4x^3 + 1$, on a

$$f'(c) = 0 \iff 4c^3 + 1 = 0 \iff c = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} .$$

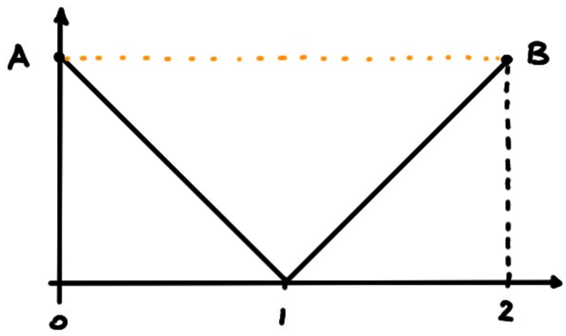
◇

Bien-sûr, si une des conditions du théorème n'est pas vérifiée, la conclusion du théorème n'est plus garantie (en général).

Exemple 9.44. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := |x-1|\,.$$

Ici $f(0) = f(2) = 1$, mais il n'existe aucun $c \in]0,2[$ tel que $f'(c) = 0$.



Ce n'est pas une contradiction avec le Théorème de Rolle, puisque f ne satisfait pas aux hypothèses : elle est continue sur $[0,2]$, dérivable en tout point de $]0,2[$ *sauf* en $x = 1$. ◇

9.10 Le Théorème des accroissements finis

Le résultat suivant, appelé **Théorème des Accroissements Finis** (parfois abbrégé "TAF" par la suite), est une généralisation du Théorème de Rolle :

Théorème 9.45. *Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Preuve: Définissons

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et $g(a) = g(b) = 0$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

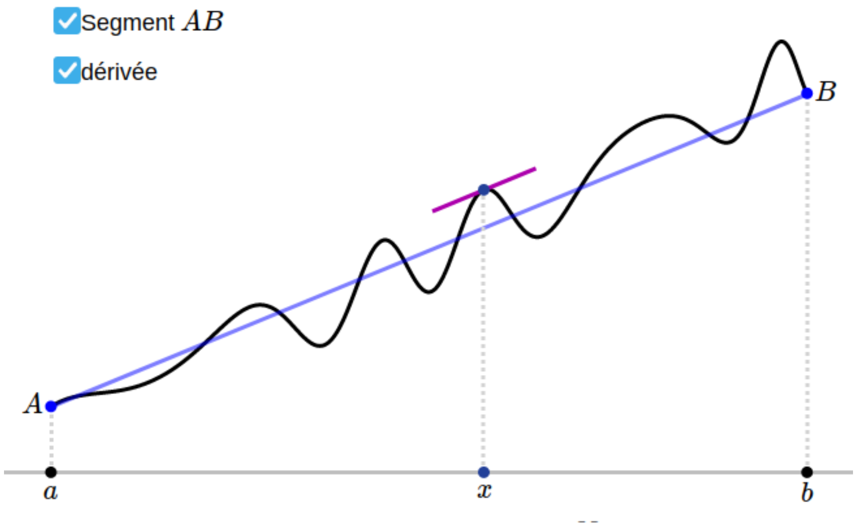
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

donc $g'(c) = 0$ est équivalent à $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Le quotient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

représente la pente du segment qui relie le point $A = (a, f(a))$ au point $B = (b, f(b))$. Donc l'interprétation géométrique du théorème des accroissements finis est la suivante : si le graphe d'une fonction lisse part d'un point A et arrive à un point B, il doit exister au moins un point de son graphe où la droite tangente est parallèle au segment AB :



9.10.1 Conséquence 1 : Variation de f et signe de f'

(ici, Video: v_derivee_vs_variation.mp4)

Proposition 13. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors*

1) *f est croissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
2) *f est décroissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Preuve: Supposons que f est croissante sur $[a, b]$. Considérons un point $x \in]a, b[$ quelconque. Comme f est dérivable en x, sa dérivée est égale à sa dérivée latérale à droite :

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{z \to x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} .$$

Ce dernier quotient peut donc être considéré pour des $z > x$, ce qui implique que le dénominateur $z - x > 0$, et que le numérateur $f(z) - f(x) \geqslant 0$ (puisque f est supposée croissante). Donc le quotient est $\geqslant 0$, et donc sa limite est aussi positive : $f'(x) \geqslant 0$.

Supposons maintenant que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. On peut appliquer le TAF sur $[x_1, x_2]$: il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geqslant 0 .$$

Comme $x_2 - x_1 > 0$, ceci implique $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Puisque ceci vaut pour toute paire x_1, x_2 (avec $x_1 < x_2$), on a bien montré que f est croissante sur $[a, b]$. □

Remarque 9.46. On peut également montrer, sous les mêmes hypothèses du théorème, que

1) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a, b]$
2) $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a, b]$

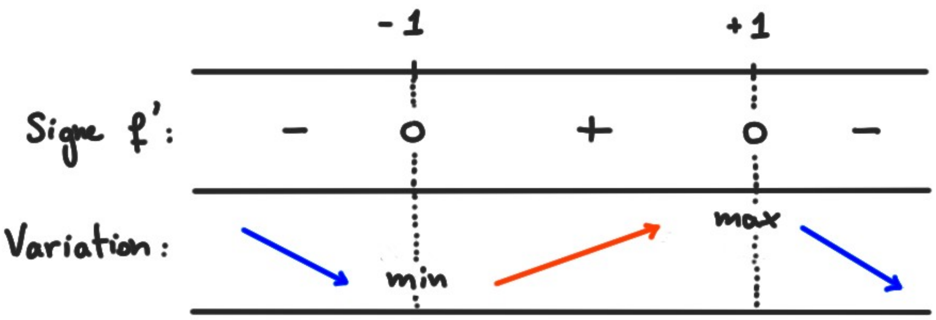
Mais les réciproques de ces affirmations ne sont pas vraies! En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais sa dérivée s'annule en 0. ◇

Par la proposition ci-dessus, on peut étudier la **variation** d'une fonction dérivable, c'est-à-dire trouver les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante, simplement en étudiant le signe de sa dérivée.

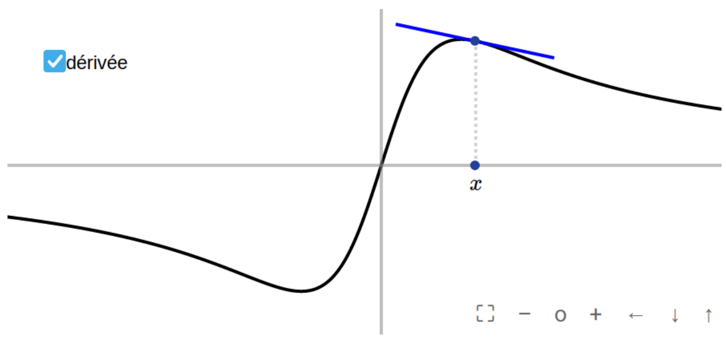
Exemple 9.47. Considérons $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

Le signe de f' permet ainsi de déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante :



En plus du fait que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, ces informations permettent déjà de produire une esquisse raisonnable du graphe :



◇

La proposition ci-dessus peut aussi s'utiliser pour démontrer des inégalités "universelles" entre fonctions :

Exemple 9.48. Montrons que

$$\boxed{e^x \geqslant 1+x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

Si on pose $f(x) := e^x - (1+x)$, il s'agit donc de montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or

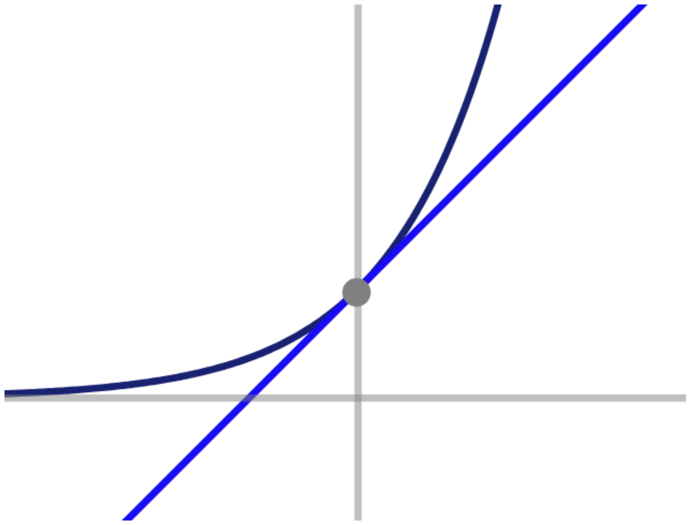
$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

On conclut par la proposition que

- ⋆ f est décroissante sur $]-\infty, 0]$, et donc $f(x) \geqslant f(0)$ pour tout $x \leqslant 0$,
- ⋆ f est croissante sur $[0, +\infty[$, et donc $f(0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$,

Dans tous les cas, $f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

On remarque que $y = 1+x$ est l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = e^x$ au point $(0,1)$. On a donc en démontré que le graphe de f est toujours au-dessus de sa droite tangente :



◇

Exemple 9.49. On peut également montrer que

$$\boxed{\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

◇

9.10.2 Conséquence 2 : Les fonctions de dérivée nulle sont des constantes

Lemme 25. *Soit $f\, :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable en tout point de $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante.*

Preuve: On montre que f est constante en montrant qu'elle prend, en tout point x de l'intervalle, la même valeur qu'en un point x_0 fixé. Fixons donc $x_0 \in]a, b[$.

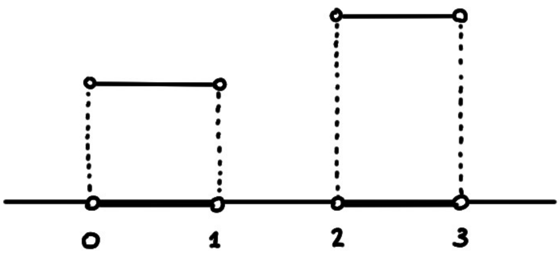
Prenons un autre point $x \in]a, b[$. Supposons que $x > x_0$. Puisque f est dérivable sur $]a, b[$, elle satisfait aux hypothèses du TAF sur $[x_0, x]$: il existe un point $c \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)\,.$$

Mais comme $f'(c) = 0$, ceci implique que $f(x) = f(x_0)$.

Si $x < x_0$, on fait la même chose sur $[x, x_0]$. □

Remarque 9.50. Dans le lemme précédent, il est essentiel que le domaine de la fonction soit *un intervalle*, pas juste un ouvert ! En effet, on peut très bien avoir une fonction définie sur un domaine qui est une union de deux intervalles ouverts, par exemple $D =]0, 1[\cup]2, 3[$, dont la dérivée est nulle partout, mais qui n'est pas constante :



◇

Comme conséquence du lemme, un résultat que l'on utilisera plus tard dans le chapitre sur l'intégration :

Corollaire 10. *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continues et dérivables sur* $]a, b[$*. Si*

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in]a, b[\,,$$

alors il existe une constante C *telle que*

$$f(x) = g(x) + C \qquad \forall x \in]a, b[\,.$$

Preuve: Soit $h(x) := f(x) - g(x)$. Puisque

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[\,,$$

le lemme précédent garantit qu'il existe une constante C telle que $h(x) = C$, et donc $f(x) = g(x) + C$, pour tout $x \in [a, b]$. □

9.10.3 Conséquence 3 : Dérivées latérales et limites de la dérivée

Proposition 14. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, b[$*.*

1) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ *existe et est finie, alors* f *est dérivable à droite en* $x = a$*, et*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,.$$

2) Si $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x)$ *existe et est finie, alors* f *est dérivable à gauche en* $x = b$*, et*

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} f'(x)\,.$$

Preuve: Pour démontrer la première affirmation, calculons la dérivée à droite en a :

$$f'_+(a) = \lim_{z \to a^+} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\,.$$

Appliquons le TAF sur $[a, z]$: il existe $c_z \in]a, z[$ tel que

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(c_z)\,.$$

Or $c_z \to a^+$ lorsque $z \to a^+$, et donc

$$\lim_{z \to a^+} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a^+} f'(c_z) = \lim_{c \to a^+} f'(c)\,,$$

ce qu'on voulait démontrer. □

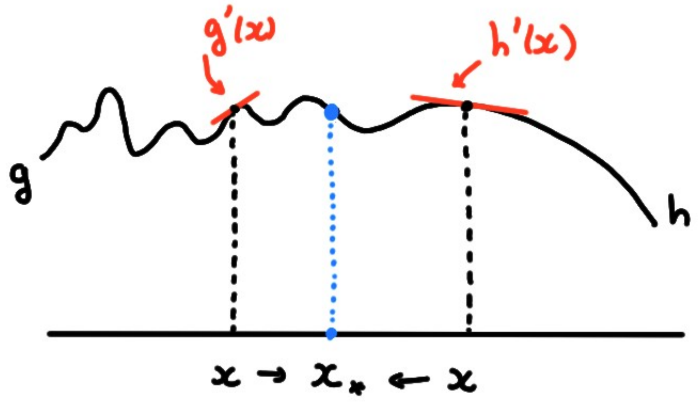
Cette dernière proposition est utile pour tester la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux, au point de raccordement. En effet, soient g et h des fonctions dérivables, et soit

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leqslant x_*\,, \\ h(x) & \text{si } x > x_*\,. \end{cases}$$

Supposons que f est continue en x_* (ce qui, ici, signifie que $g(x_*) = \lim_{x\to x_*^+} h(x)$). Pour vérifier si f est aussi dérivable en x_*, on n'a a priori pas d'autre option que de calculer ses dérivées latérales en x_*,

$$f'_-(x_*) = \lim_{x\to x_*^-} \frac{g(x)-g(x_*)}{x-x_*} = g'_-(x_*)\,,$$
$$f'_+(x_*) = \lim_{x\to x_*^+} \frac{h(x)-g(x_*)}{x-x_*}\,,$$

et de voir si elles sont égales : $f'_-(x_*) \stackrel{?}{=} f'_+(x_*)$. Mais, puisque g (resp. h) est dérivable en tout $x < x_*$ (resp. $x > x_*$) proche de x_*, on peut éviter de passer par les dérivées latérales.



En effet, la proposition précédente garantit que $f'_-(x_*) = f'_+(x_*)$ si

$$\lim_{x\to x_*^-} f'(x) = \lim_{x\to x_*^+} f'(x)\,,$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{x\to x_*^-} g'(x) = \lim_{x\to x_*^+} h'(x)\,.$$

Exemple 9.51. Considérons la fonction suivante, déjà rencontrée plus haut,

$$f(x) := \begin{cases} x^2+ax+1 & \text{si } x \leqslant 0\,,\\ \sin(2x)+b & \text{si } x > 0\,,\end{cases}$$

et reposons la question : Est-il possible de choisir a et b de façon à ce que f soit dérivable en 0 ?

On a vu que la continuité en 0 est garantie en imposant $b = 1$. Par la remarque ci-dessus, on peut garantir la dérivabilité en 0 en imposant

$$\lim_{x\to 0^-} \left(x^2+ax+1\right)' = \lim_{x\to 0^+} (\sin(2x)+b)'\,,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0^-} \left(2x+a\right) = \lim_{x\to 0^+} 2\cos(2x)\,,$$

ce qui donne $a = 2$. ◇

9.10.4 Une généralisation du Théorème des accroissements finis

Le Théorème de Rolle permet en fait de démontrer un résultat plus général que le Théorème des accroissements finis :

Théorème 9.52. *(Théorème des Accroissements Finis généralisé (abbrégé "TAFG") par la suite) Soient f, g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Si $g(a) \neq g(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \,.$$

Preuve: Puisqu'on suppose que $g(b) - g(a) \neq 0$, on peut définir

$$r(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \,.$$

Par les propriétés de $f$et g sur $[a, b]$, r est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec

$$r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \,.$$

De plus, on observe que $r(a) = r(b) = 0$. Donc, par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $r'(c) = 0$. □

Remarque 9.53. En prenant $g(x) = x$, on voit que le TAF est un cas particulier du TAFG. ◇

9.11 La règle de Bernoulli-l'Hôpital

(ici, Video: `v_derivee_BH.mp4`)

Nous allons voir maintenant un outil puissant qui, lorsqu'il est bien utilisé, permet d'étudier des indéterminations qu'aucune des méthodes présentées jusqu'ici ne permettait d'aborder.

Malgré tout, cet outil a un prix : il ne s'applique que dans certaines situations très particulières (voir les hypothèses ci-dessous), et sa justification est délicate.

Théorème 9.54. *(Règle de Bernoulli-l'Hôpital) Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivables , telles que*

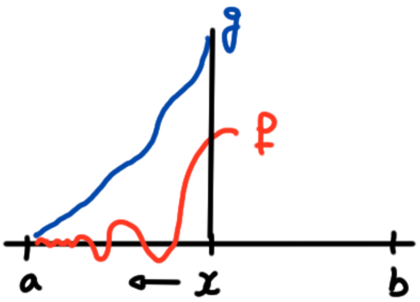
1) *$g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$,*
2) *la limite*
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$
est une indétermination du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", c'est-à-dire que
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L\,,$$
où $L \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

Si
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R\,,$$
où R est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, alors
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = R\,.$$
Le résultat ci-dessus reste valable si on remplace partout

- ⋆ *la limite $x \to a^+$ par $x \to b^-$, ou alors*
- ⋆ *$]a, b[$ par $]a, +\infty[$ et la limite $x \to a^+$ par $x \to +\infty$, ou alors*
- ⋆ *$]a, b[$ par $] - \infty, b[$ et la limite $x \to a^+$ par $x \to -\infty$.*

Preuve:
Commençons par traiter le cas où $L = 0$ et $R \in \mathbb{R}$.

Fixons un $x \in]a, b[$ (que l'on fera ensuite $\to a^+$).



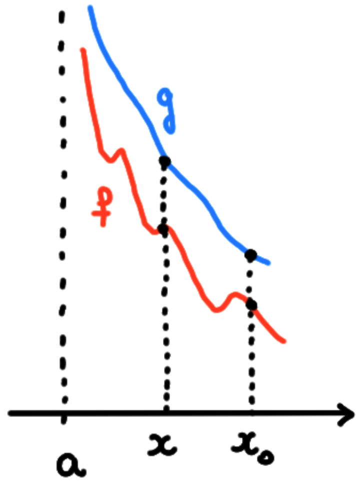
Comme $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L = 0$, on peut prolonger f et g par continuité à $[a, x]$, en posant $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Comme maintenant f et g sont continues sur $[a, x]$ et dérivables sur $]a, x[$, on peut utiliser la généralisation du Théorème des accroissements finis (fin de la section précédente), pour garantir l'existence d'un point $c_x \in]a, x[$ tel que
$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} g'(c_x)\,.$$
Ceci nous permet de récrire le quotient (puisque ni g ni g' ne s'annulent dans $]a, b[$) :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
Maintenant, prenons la limite $x \to a^+$. Comme $a < c_x < x$, on a $c_x \to a^+$ lorsque $x \to a^+$, et donc
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R\,.$$

Passons maintenant au cas où $L = +\infty$ et $R \in \mathbb{R}$.

On a donc $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, et la limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R$$

est finie.



En préparation, fixons $a < x < x_0 < b$ et écrivons

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\Big| + \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big| \cdot \underbrace{\Big|1 - \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}\Big|}_{=:\varphi_{x_0}(x)} + \underbrace{\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big|}_{=:\psi_{x_0}(x)}\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x) \\ &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big|\varphi_{x_0}(x) + |R|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x)\,,\end{aligned}$$

et on peut isoler $\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big|$ dans cette dernière inégalité :

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| \leqslant \frac{|R|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x)}{1-\varphi_{x_0}(x)}\,.$$

Voyons maintenant comment le côté droit peut être rendu arbitrairement petit en prenant x et x_0 suffisamment proches de a. D'abord, appliquons le TAFG sur $[x, x_0]$: il existe $c_{x,x_0} \in]x, x_0[$ tel que

$$\psi_{x_0}(x) = \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big| = \Big|\frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})} - R\Big|\,.$$

Par hypothèse, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to R$. Donc en fixant $\varepsilon > 0$, on peut prendre un $x_0 > a$ suffisamment proche de a, de façon à ce que pour tout $a < x < x_0$, $0 \leqslant \psi_{x_0}(x) \leqslant \varepsilon$. Ensuite, remarquons qu'à x_0 fixé, on a toujours $\lim_{x\to a^+} \varphi_{x_0}(x) = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to a^+} \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| \leqslant \varepsilon\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = R\,,$$

ce qu'on voulait démontrer. □

La règle de BH, si elle s'applique de part et d'autre d'un point a, permet évidemment de calculer des limites $x \to a$:

Exemple 9.55. Étudions la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

Clairement, $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = x^3$ satisfont aux hypothèses du théorème : toutes deux sont dérivables dans un voisinage de $x = 0$, ni g ni g' ne s'annulent dans un voisinage épointé de $x = 0$, et toutes deux tendent vers zéro lorsque $x \to 0$. On peut alors étudier la limite du quotient des dérivées :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

Comme cette limite existe et est finie, on peut conclure par le théorème que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{6}\,.$$

◇

Informel 9.56. On n'utilise surtout pas la règle de BH pour calculer des limites fondamentales, telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad !!!$$

En effet si on voulait utiliser BH pour cette limite, on devrait dériver le sinus : $(\sin(x))' = \cos(x)$. Or si on relit la preuve de comment on montre que la dérivée du sinus c'est le cosinus, on se rend compte qu'elle repose sur la connaissance de ... $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$!

Donc la limite "$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$" doit être considérée comme fondamentale, calculée uniquement à partir de la définition de base du sinus, dans le cercle trigonométrique.

Même si elle est formulée pour des indéterminations qui concernent des quotients, la règle de BH permet en fait de calculer des indéterminations de tous les types. Ceci se fait en récrivant la fonction dont ont aimerait calculer la limite, de façon a y faire apparaître un quotient.

Exemple 9.57. (Une indétermination "$0 \cdot \infty$")

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x = 0\,. \end{aligned}$$

◇

Exemple 9.58. (Une indétermination "1^∞")

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x\,.$$

Puisque $\frac{x}{x+2} > 0$ pour tout x suffisamment grand et positif, on peut exponentier :

$$\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x = \exp\Big(x\log\big(\frac{x}{x+2}\big)\Big)$$

Comme l'exponentielle est continue, on pourra rentrer la limite (une fois qu'on aura vérifié que la limite dans l'exposant existe) :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x}{x+2}\big)^x = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} x\log\big(\frac{x}{x+2}\big)\Big)$$

Étudions donc la limite à l'intérieur de l'exponentielle. En réarrangeant, on fait apparaître une limite "$\frac{0}{0}$" :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\log\big(\frac{x}{x+2}\big) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)-\log(x+2)}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+2)} = -2\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x = \exp(-2)\,.$$

◇

Informel 9.59. Avant de se lancer corps et âme dans l'utilisation de la règle de BH, on a tout intérêt de s'arrêter un moment et se demander si elle est vraiment nécessaire, et surtout si ses hypothèses sont satisfaites...

Exemple 9.60. Considérons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)\cos(\sin(x^8))}{x^7}\,.$$

Numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables , mais est-ce qu'on veut vraiment se mettre à dériver le numérateur ?

Or on voit que la composée $\cos(\sin(x^8))$ a une limite qui vaut 1 (différente de zéro), donc elle ne pose pas de problème, on peut simplement la séparer du reste, puis faire un changement de variable $z = x^7$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)\cos(\sin(x^8))}{x^7} &= \underbrace{\big(\lim_{x\to 0}\cos(\sin(x^8))\big)}_{=1}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)}{x^7}\Big)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z} = 1\,.\end{aligned}$$

◇

Exemple 9.61. Considérons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{3x}$$

Cette limite est de la forme $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ et se calcule directement, en mettant en évidence le terme dominant au numérateur,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{\sin(x^2)}{x})}{3x} = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{3}+\frac{\sin(x^2)}{3x}\Big) = \frac{1}{3}\,.$$

Cette limite fournit un exemple de cas où numérateur et dénominateur sont tous les deux dérivables, mais le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite puisque

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1+2x\cos(x^2)}{3}\,,$$

qui n'a pas de limite lorsque $x\to\infty$. Donc la règle de BH ne s'applique pas. ◇

9.11.1 Utilisation répétée de la règle

L'idée utilisée dans ce dernier exemple permet de revenir sur quelque chose que nous avons déjà rencontré dans le chapitre sur les suites, à savoir la hiérarchie de comportements à l'infini des polynômes, exponentielles et logarithmes.

On aura alors parfois besoin d'utiliser la règle de BH plus d'une fois :

Exemple 9.62.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}\overset{BH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}\overset{BH}{=}\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3e^{3x}}=\frac{2}{9}\times 0=0\,.$$

◇

Généralisons :

Lemme 26. *Pour toute base $a>1$, tout $\alpha>0$ et tout $m>0$,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^{mx}}=0\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^m}=0\,.$$

Preuve: Considérons la première limite. Deux remarques permettent de simplifier le calcul.

- ⋆ D'abord, on peut toujours écrire

  $$a^{mx}=e^{m'x}\,,$$

  où $m'=m\log(a)$. Or puisque $a>1$, on a $m'>0$. Donc il suffit de démontrer le résultat pour la base e.

- ⋆ Puisque $\alpha\leqslant\lfloor\alpha\rfloor+1$, il suffit aussi de démontrer le résultat pour des α entiers, c.-à-d. $\alpha=k\in\mathbb{N}$.

Fixons donc $m>0$, et montrons que pour tout entier $k\geqslant 1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{mx}}=0\,.$$

Dans le cas où $k=1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{mx}}\overset{BH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{me^{mx}}=0\,.$$

Supposons alors que le résultat a été démontré pour un entier k. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{mx}}&\overset{BH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(x^{k+1})'}{(e^{mx})'}\\&=\frac{k+1}{m}\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{mx}}\\&=0\,,\end{aligned}$$

et donc le résultat est vrai pour $k+1$.

La deuxième limite est une conséquence de la première. En effet, ne posant $y=\log_a(x)$,

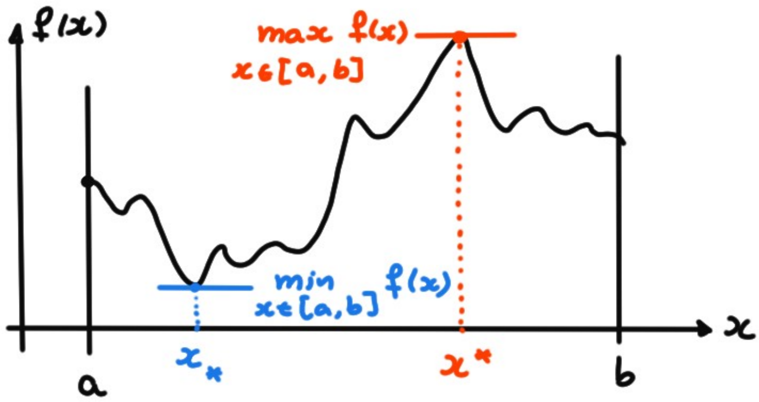
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^m}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^\alpha}{a^{my}}=0\,.$$

□

9.12 Sur la recherche des extrema d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$

Passons maintenant à l'utilisation de la dérivée dans la recherche des extrema globaux d'une fonction.

On **a vu** (lien vers la section m_fonctions_continuite_sur_a_b) que lorsque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son minimum et son maximum :



Dans cette section, on décrit un algorithme qui permet (en principe) de *trouver* ces extrema par le calcul.

Considérons, pour fixer les idées, la recherche du **maximum global** d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Par simple observation, puisqu'on *sait* qu'il est atteint quelque part sur $[a, b]$, on peut facilement lister toutes les possibilités :

1) Il peut être atteint sur les bords, en $x = a$ ou en $x = b$.
2) Il peut être atteint à l'intérieur de l'intervalle, c.-à-d. dans $]a, b[$. Mais comme c'est un maximum global, il est aussi local. Donc si f est dérivable en ce point, sa dérivée s'y annule. Et si elle n'est pas dérivable, on traite le cas séparément.

Cette simple distinction des cas nous mène directement à un algorithme pour la recherche du minimum et du maximum de f :

1) On commencera par chercher les **points stationnaires**, c'est-à-dire les points $x \in]a, b[$ où f est dérivable et s'annule : $f'(x) = 0$, ainsi que les points de $]a, b[$ où f n'est pas dérivable.
2) On regardera les valeurs de la fonction sur le bord de l'intervalle, en $x = a$ et $x = b$, et on les comparera avec les valeurs en chacun des points trouvés à l'étape précédente.
3) Après avoir listé toutes ces valeurs, on garde la plus grande, et la plus petite.

Remarque 9.63. On a vu (dans **Continuité sur un intervalle compact** (lien vers la section m_fonctions_continuite_sur_a_b)) que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors son ensemble image est un intervalle fermé et borné, donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\right],$$

et peut donc être trouvé à l'aide de l'algorithme décrit ci-dessus. ◇

Exemple 9.64. Cherchons les extremas de la fonction $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ sur $[-1, 2]$.

1) Points stationnaires :

$$\begin{aligned} f'(x) = 12(x^3 + x^2 - 2x) &= 12x(x^2 + x - 2) \\ &= 12x(x+2)(x-1)\,, \end{aligned}$$

donc la dérivée est nulle en $-2 \notin [-1, 2]$, en $0 \in [-1, 2]$ et en $1 \in [-1, 2]$. On garde :

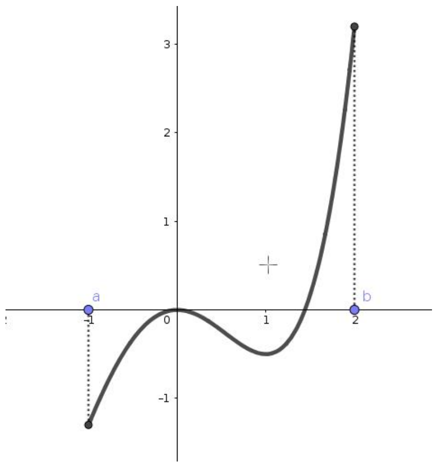
$$\boxed{f(0) = 0 \quad f(1) = -5}$$

2) Sur les bords :

$$\boxed{f(-1) = -13, \quad f(2) = 32}$$

En comparant les quatre valeurs encadrées ci-dessus, on voit que

- ⋆ f atteint son maximum global en $x = 2$ (sur le bord)
- ⋆ f atteint son minimum global en $x = -1$ (sur le bord)



En particulier,

$$\operatorname{Im}(f) = [-13, 32]\,.$$

◇

Exemple 9.65. Considérons $f(x) = |x^2(x-2)|$ sur l'intervalle $[1, 3]$. Comme $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son minimum et son maximum. On commence par écrire

$$|x^2(x-2)| = \begin{cases} -x^2(x-2) & \text{si } x \in [1, 2]\,, \\ x^2(x-2) & \text{si } x \in]2, 3]\,. \end{cases}$$

1) Points stationnaires : Sur $]1, 2[$, $f'(x) = x(4 - 3x)$, donc deux points où la dérivée s'annule, en $0 \notin]1, 2[$ et en $\frac{4}{3} \in]1, 2[$:

$$\boxed{f(\tfrac{4}{3}) = \frac{32}{27}}$$

Sur $]2, 3[$, $f'(x) = x(3x - 4)$, donc ne s'annule pas.

2) Points où f n'est pas dérivable ? Seul candidat : $x = 2$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f'(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x(4 - 3x)) = -4 \\ \lim_{x \to 2^+} f'(x) &= \lim_{x \to 2^+} (x(3x - 4)) = +4 \end{aligned}$$

Donc on garde

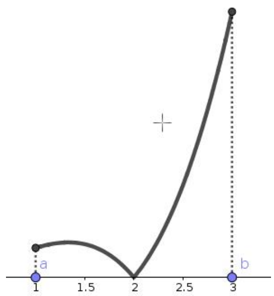
$$\boxed{f(2) = 0}$$

3) Sur les bords :

$$\boxed{f(1) = 1 \quad f(3) = 9}$$

On conclut que f

- ⋆ atteint son minimum en $x = 2$,
- ⋆ atteint son maximum en $x = 3$ (sur le bord).



Remarquons qu'en $x = \frac{4}{3}$, f possède un maximum, qui est local mais pas global.

On a aussi montré que

$$\mathrm{Im}(f) = [0, 9]$$

◇

9.13 Dérivée seconde et convexité/concavité

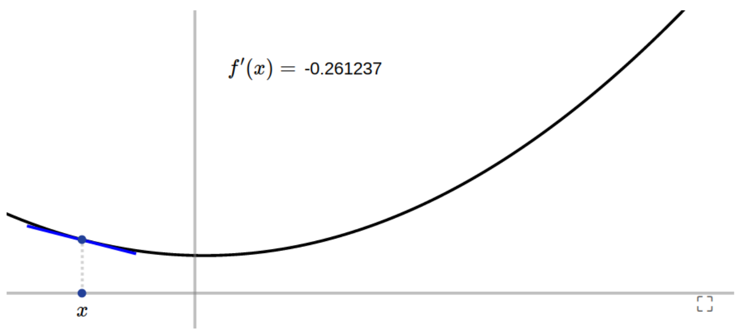
(ici, Video: `v_derivee_convexes.mp4`)

Rappelons qu'une fonction f est convexe si pour toute paire de points $x_1 < x_2$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

L'interprétation géométrique étant la suivante : si on choisit deux points quelconques sur le graphe de f, le segment qui les relie est entièrement au-dessus du graphe.

Or on peut remarquer que lorsque f est *dérivable*, c'est-à-dire lorsque $f'(x)$ est défini pour tout x, alors la convexité semble être équivalente à la croissance de $x \mapsto f'(x)$:

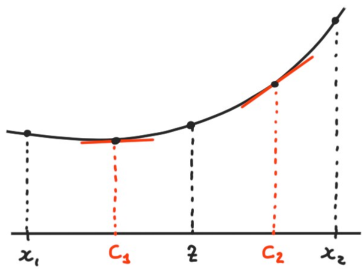


Sur l'animation ci-dessus, on a une fonction qui est manifestement convexe et dérivable, et on observe que sa dérivée est croissante. Ceci implique que si la dérivée est dérivable, et si la dérivée de la dérivée, c'est-à-dire la *dérivée seconde*, est positive, alors la fonction doit être convexe. Plus précisément :

Théorème 9.66. *Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I (f est dérivable, et f' est aussi dérivable sur I).*

1) *Si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I.*
2) *Si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I.*

Preuve: Il suffit de démontrer la première implication. Remarquons d'abord que comme $f'' \geqslant 0$, f' est croissante sur I. Soient $x_1 < x_2$ dans I. Fixons $\lambda \in]0,1[$ et posons $z := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$.



On applique deux fois le théorème des accroissements finis :

⋆ Sur $[x_1, z]$: il existe $c_1 \in]x_1, z[$ tel que

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1}$$

⋆ Sur $[z, x_2]$: il existe $c_2 \in]z, x_2[$ tel que

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}$$

Remarquons que comme $c_1 < c_2$, et puisque f' est croissante,

$$f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$$

Donc

$$\begin{aligned} f(z) - f(x_1) &\leqslant f'(c_2)(z - x_1) \qquad &| \cdot (1-\lambda) \\ f(x_2) - f(z) &= f'(c_2)(x_2 - z) \qquad &| \cdot \lambda \end{aligned}$$

En soustrayant les deux inégalités (multipliées par $1-\lambda$ et λ), on trouve

$$\begin{aligned} f(z) - \big\{(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\big\} &\leqslant \\ & f'(c_2)\underbrace{\big((1-\lambda)(z - x_1) - \lambda(x_2 - z)\big)}_{=0} = 0\,. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$f(z) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

□

Exemple 9.67. Prenons $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme

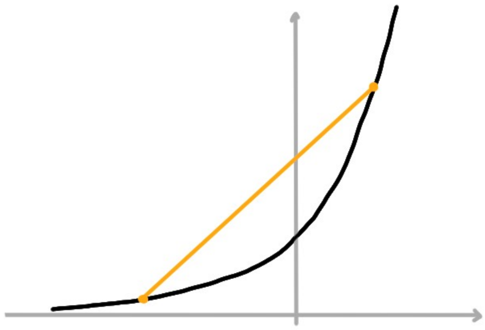
$$f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

le théorème garantit que f est convexe. ◇

Exemple 9.68. Prenons $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$. Puisque

$$f''(x) = e^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

le théorème garantit que f est convexe.

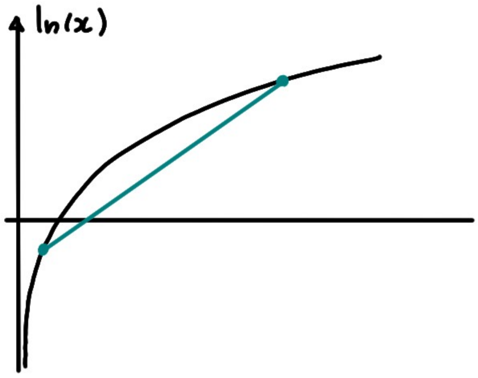


◇

Exemple 9.69. Considérons maintenant $f(x) = \log(x)$, sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme

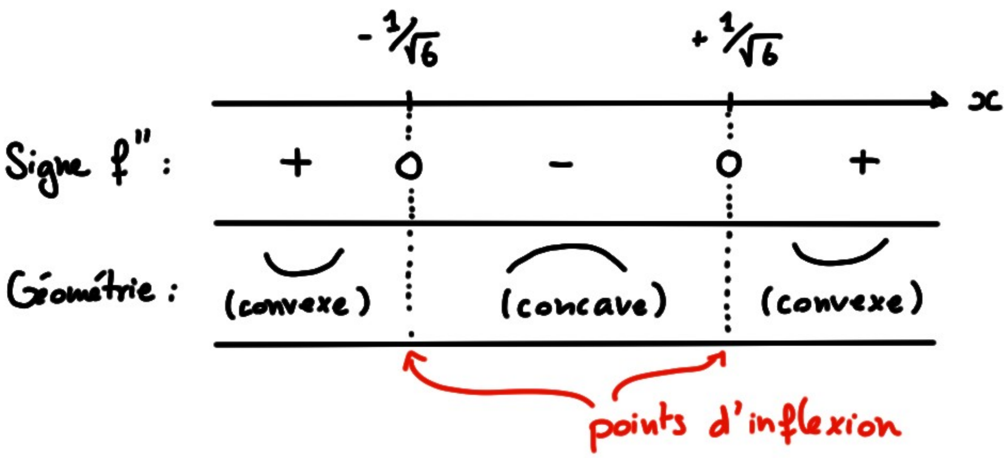
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$$

le théorème entraîne que f est concave :



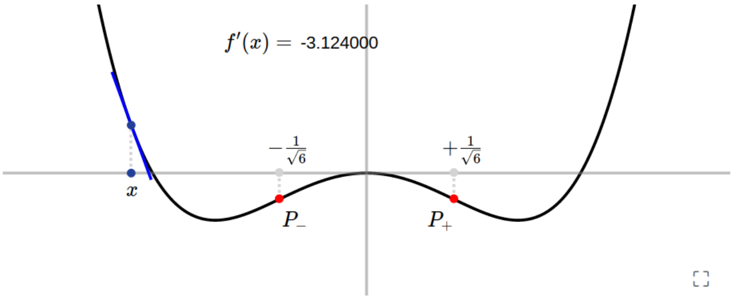
◇

Exemple 9.70. Considérons le polynôme $f(x) = x^4 - x^2$, et cherchons les intervalles sur lesquels f est convexe/concave. Puisque f est deux fois dérivable, l'étude du signe de $f''(x) = 2(6x^2 - 1)$ donne :



On en déduit par le théorème que :

- ⋆ f est convexe sur $]-\infty, -\sqrt{1/6}[$,
- ⋆ f est concave sur $]-\sqrt{1/6}, +\sqrt{1/6}[$,
- ⋆ f est convexe sur $]+\sqrt{1/6}, +\infty[$.



Les points $P_\pm = (\pm\sqrt{1/6}, f(\pm\sqrt{1/6}))$ sont des **points d'inflexion** : ce sont des points du graphe où la nature de la courbe change, passant de concave (resp. convexe) à convexe (resp. concave). $\diamond$