
Série 02 (Nombres $\mathbb{R}$)

Ex-02-01: Montrer que dans $\mathbb{R}$,

- 1) Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$, alors $x + x' \leq y + y'$.
- 2) Si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.
- 3) Si $z > 0$, alors $x \leq y$ si et seulement si $xz \leq yz$.
- 4) Si $0 < x \leq y$, alors $1/x \geq 1/y$.

Ex-02-02: Montrer les propriétés ci-dessous.

- 1) $|-x| = |x|$
- 2) $-|x| \leq x \leq |x|$
- 3) Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\max\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).\end{aligned}$$

Ex-02-03: Sans faire de calculs, donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous. Dans chaque cas, préciser si il s'agit en plus d'un minimum ou d'un maximum.

- 1) $B =]\sqrt{3}, \infty[$
- 2) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$
- 3) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$
- 4) $E = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- 5) $F = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- 6) $G = \left\{\frac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- 7) $H = \mathbb{Q}$
- 8) $I = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$

Ex-02-04: On considère l'ensemble

$$A = \left\{\frac{3n}{n+2} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Calculer $\inf A$ et $\sup A$, uniquement à l'aide des définitions.

Ex-02-05: Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné non vide. Vrai ou faux ?

- 1) Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est fermé.
- 2) Si A est fermé, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.
- 3) Si $\sup A \notin A$ et $\inf A \notin A$, alors A est ouvert.
- 4) Si A est ouvert, alors $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$.

Ex-02-06: Montrer que le supremum d'un ensemble majoré est unique.

Ex-02-07: Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles bornés.

-
- 1) Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.
 - 2) Si $x \leq y$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, montrer que $\sup A \leq \inf B$.
 - 3) Donner un exemple de deux ensembles disjoints A, B tels que $x < y$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, et pour lesquels $\sup A = \inf B$.
 - 4) Donner un exemple de deux ensembles disjoints A, B tels que $\inf A = \inf B$.

Ex-02-08: Montrer que si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.

Ex-02-09: Montrer que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Ex-02-10: Montrer que pour tout $y \geq 0$, l'équation

$$x^2 = y$$

possède toujours une solution dans $\mathbb{R}_+$; on la note $\sqrt{y}$, et on l'appelle **racine carrée de y** .

Remarque .12. Il existe une généralisation de ce résultat : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $y \geq 0$, l'équation

$$x^p = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $\sqrt[p]{y}$, et on l'appelle **racine p -ième de y** .

Ex-02-11: (Cet exercice est facultatif.)

Soit $C := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^3 < 1\}$.

- 1) Montrer que C est majoré.
- 2) Montrer que C ne possède pas de maximum.
- 3) Calculer $\sup C$.

Ex-02-12: (Cet exercice est facultatif.)

Montrer que l'ensemble $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ est ouvert.