
Série 01 (Fonctions, preuves par récurrence)

Ex-01-01: Sans faire de calculs, donner l'ensemble image des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $-2x + 1, D = \mathbb{R}$ | 5) $x^2 + 1, D = \mathbb{R}$ | 10) $\cos x, D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ |
| 2) $-2x + 1, D = [-1, 1]$ | 6) $1 - x^2, D = \mathbb{R}$ | 11) $\frac{1}{3} \sin x, D = \mathbb{R}$ |
| 3) x^p ($p \in \mathbb{Z}^*$ impair),
$D = \mathbb{R}$ | 7) $x^2 + 2x, D = \mathbb{R}$ | 12) Sur $D = \mathbb{R}$,
$\begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x - 1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ |
| 4) x^p ($p \in \mathbb{Z}^*$ pair), $D = \mathbb{R}$ | 8) $\tan x, D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | |
| | 9) $\sin x, D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |

Ex-01-02: Montrer que chaque fonction ci-dessous est bijective, et donner sa réciproque.

- 1) $f : [0, 1] \rightarrow [-3, -2], f(x) = x - 3.$
- 2) $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1], g(x) = x^2.$
- 3) $h : [-1, 0] \rightarrow [0, 1], h(x) = x^2.$

Ensuite, esquisser le graphe de chacune de ces fonctions, ainsi que de leurs réciproques.

Ex-01-03: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective et impaire. Montrer que sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi impaire.

Ex-01-04: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 25}.$$

Calculer $\text{Im}(f)$. Ensuite, déterminer le nombre de préimages pour chaque $y \in \text{Im}(f)$.

Ex-01-05: (Facultatif!)

Montrer que la fonction ci-dessous est une bijection, puis donner sa réciproque.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{3^x + 2}{3^{-x}}$$

Ex-01-06: Pour chacun des ensembles C ci-dessous, donner un exemple explicite de bijection $f :]0, 1[\rightarrow C$.

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $C =]0, b[,$ où $b > 0.$ | 3) $C =]0, \infty[$ | 5) $C = [0, 1]$ (facultatif!) |
| 2) $C =]a, b[,$ où $a < b.$ | 4) $C =]-\infty, \infty[$ | |

Ex-01-07: Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vrai ou faux?

- 1) $f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f = g.$
- 2) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
- 3) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.

-
- 4) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.
 - 5) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.
 - 6) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Ex-01-08: Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ensuite, donner la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Ex-01-09: Montrer, par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, que $n^3 + 5n$ est un multiple de 3.

Ex-01-10: Démontrer l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1.$$

Ex-01-11: Pour tout entier $n \geq 0$, on définit le **nombre de Fermat** $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Démontrer, pour $n \geq 1$, l'identité

$$F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Ex-01-12: Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

- 1) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$
- 2) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$